RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 giugno 1921.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle funzioni abeliane.* IV: *Applicazioni alle serie algebriche di gruppi sopra una curva.* Nota del Socio G. Castelnuovo.

12. Data sopra una curva C di genere p (1) una serie algebrica γ_n^r di ∞^r gruppi di n punti, dei quali gruppi supporremo che mai due siano equivalenti ($r \leqq p$), conviene in varie questioni sostituire alla serie (con Torelli e Rosati) una nuova serie γ_p^r della stessa dimensione e di ordine p, in corrispondenza birazionale con quella. La γ_p^r dicesi *equivalente* alla γ_n^r se le somme dei valori di ciascun integrale abeliano di prima specie in due gruppi corrispondenti delle due serie coincidono (a meno di periodi) o differiscono di una costante; dicesi invece *residua* se la somma dei detti valori in tutti gli $n+p$ punti di due gruppi corrispondenti rimane costante al variare dei gruppi stessi. In linguaggio geometrico, nel primo caso la differenza, nel secondo caso la somma di due gruppi corrispondenti di γ_n^r e γ_p^r varia in una serie lineare. Questa serie, se γ_n^r e γ_p^r sono residue, è una g_{n+p}^n che può supporsi non speciale. Segue che l'indice della γ_n^r, cioè il numero dei gruppi contenenti r punti assegnati, uguaglia il numero dei gruppi della γ_n^r contenuti in una serie lineare g_{n-r+p}^{n-r} (residua di quegli r punti rispetto alla g_{n+p}^n).

(1) Ved. le Note precedenti I, II e III in questi Rendiconti, vol. XXX, 1° sem. 1921, pp. 50, 99, 195.

13. Le considerazioni seguenti si applicano ad una serie γ_n^1 i cui gruppi corrispondano birazionalmente ai punti della curva sostegno C. Questa restrizione, che potrebbe togliersi senza difficoltà, è posta per rendere più breve e chiaro il ragionamento.

Tra il punto ζ che descrive la curva C e i punti $\zeta_1', \dots, \zeta_n'$ che costituiscono il gruppo corrispondente della γ_n^1 passano (secondo Hurwitz) le p relazioni seguenti, ove $j_1, \dots, j_p$ indicano gli integrali normali di prima specie relativi alla solita tabella di periodi [III, (30)]:

$$(45) \qquad j_h(\zeta_1') + \dots + j_h(\zeta_n') = \varrho_{h1} j_1(\zeta) + \dots + \varrho_{hp} j_p(\zeta) + \varrho_h .$$

Le ϱ_h e ϱ_{hl} sono costanti, quest'ultime legate ai periodi σ degli integrali j da $2p^2$ relazioni a coefficienti interi g:

$$(46) \qquad \begin{cases} \varrho_{hl} = g_{lh} + g_{lp+1}\sigma_{h1} + \dots + g_{l2p}\sigma_{hp} , \\ \sum_{i=1}^{p} \varrho_{hi}\sigma_{il} = g_{p+lh} + g_{p+lp+1}\sigma_{h1} + \dots + g_{p+l2p}\sigma_{hp} , \end{cases}$$
$$(h, l = 1, 2, \dots p) .$$

Avremo occasione tra poco di considerare, insieme alla γ_n^1 data, le serie multiple $\gamma_{2n}^2, \gamma_{3n}^3, \dots$ che si ottengono riunendo a coppie, a terne ... i gruppi della γ_n^1, serie che supporremo prive o liberate da gruppi equivalenti. E ad esse potremo sostituire le $\gamma_p^1, \gamma_p^2, \gamma_p^3 \dots$ equivalenti. La prima di queste può definirsi mediante le (45) ove a primo membro, in luogo di n, si scriva p; se, nella stessa ipotesi, al posto di $j_i(\zeta)$ a secondo membro si sostituiscono le somme dei valori che j_i assume in due, tre, ... punti di C, il gruppo $\zeta_1', \dots, \zeta_p'$ varierà in γ_p^2 o $\gamma_p^3, \dots$ In breve, se per un dato gruppo di p punti $\zeta_1, \dots, \zeta_p$, scriviamo

$$(29) \qquad u_i = j_i(\zeta_1) + \dots + j_i(\zeta_p) \qquad (i = 1, 2, \dots, p)$$

e indichiamo con u_i' le analoghe somme relative ad un secondo gruppo $\zeta_1', \dots, \zeta_p'$, possiamo dire che le p relazioni

$$(47) \qquad u_h' = \varrho_{h1} u_1 + \varrho_{h2} u_2 + \dots + \varrho_{hp} u_p + \varrho_h$$

definiscono la γ_p^1, o la γ_p^2, o la $\gamma_p^3, \dots$ secondo che dei punti $\zeta_1, \dots, \zeta_p$ teniamo fissi $p-1$, o $p-2$, o $p-3, \dots$, lasciando variare i rimanenti.

Le (47), ove si cambino i segni a tutte le ϱ_{hl}, rappresentano invece, nelle stesse ipotesi, le serie $\gamma_p^1, \gamma_p^2, \gamma_p^3, \dots$, *residue* della γ_n^1 e dei suoi multipli.

La corrispondenza algebrica (45), che muta ogni punto ζ in un gruppo $\zeta_1', \dots, \zeta_n'$ della γ_n^1, ammette una corrispondenza inversa che muta ogni punto ζ' in un certo gruppo $\zeta_1, \dots, \zeta_\nu$, ove ν è l'indice della γ_n^1. Varranno, al solito, relazioni del tipo

$$(48) \qquad j_h(\zeta_1) + \dots + j_h(\zeta_\nu) = \bar{\varrho}_{h1} j_1(\zeta') + \dots + \bar{\varrho}_{hp} j_p(\zeta') + \bar{\varrho}_h ,$$

nelle quali le costanti $\bar{\varrho}_{hl}$ sono definite (secondo Hurwitz) da relazioni analoghe alle (46), in cui però gli interi g siano sostituiti da nuovi interi $\bar{g}$ legati ai precedenti dalle uguaglianze

$$(49) \qquad \begin{cases} \bar{g}_{hl} = g_{lh} \ , \ \bar{g}_{p+h\,,\,p+l} = g_{p+l\,,\,p+h} \ , \\ \bar{g}_{h\,,\,p+l} = -\,g_{l\,,\,p+h} \ , \ \bar{g}_{p+h\,,\,l} = -\,g_{p+l\,,\,h} \end{cases} \qquad (h\,,\,l = 1\,,2\,,\ldots p)\,.$$

Il prodotto della corrispondenza diretta per la inversa è una corrispondenza simmetrica $(\nu n\,,\nu n)$ che muta ogni punto η di C nei νn punti η' costituenti i ν gruppi della γ_n^1 che contengono η, tra i quali punti comparisce anche η contato ν volte.

Per questa nuova corrispondenza valgono equazioni del tipo

$$(50) \qquad j_h(\eta_1') + \ldots + j_h(\eta_{\nu n}') = \pi_{h1}\, j_1(\eta) + \ldots + \pi_{hp}\, j_p(\eta) + \pi_h \ ,$$

ove

$$\pi_{hl} = \sum_{i=1}^{p} \bar{\varrho}_{hi}\, \varrho_{il}\,.$$

Si ha dunque

$$(51) \qquad \| \pi_{hl} \| = \| \bar{\varrho}_{hl} \| \cdot \| \varrho_{hl} \| \ ,$$

eseguendo il prodotto secondo la nota regola del calcolo delle matrici.

Se formiamo, come al n. 10, la equazione caratteristica (34) o (35) delle π_{hl}, troviamo, come coefficienti, certi numeri interi positivi $i_1\,,i_2\,,\ldots\,,i_p$ che forniscono altrettanti caratteri invarianti (per trasformazioni birazionali) della γ_n^1 data o della γ_p^1 equivalente. Ci proponiamo di stabilirne i significati geometrici.

14. Riprendiamo a tal fine la varietà di Jacobi V_p relativa alla curva C (III, n. 9), varietà descritta da un punto dello spazio S_{p+1}, le cui coordinate cartesiane siano funzioni abeliane dei p parametri u_i dati dalle (29). La corrispondenza algebrica (45) esistente sulla curva C determina una corrispondenza razionale (47) entro la V_p, per effetto della quale ogni punto u si muta in *un* punto u', mentre ad ogni punto u' corrispondono

$$\delta = \| g_{rs} \| = \| \bar{\varrho}_{hl} \| \cdot \| \varrho_{hl} \| = \| \pi_{hl} \|$$

punti u.

Se il punto u' descrive in V_p una varietà Θ del primo ordine, rappresentata dall'annullarsi di una funzione ϑ riemanniana, i δ punti u corrispondenti descrivono una varietà intermediaria Φ che ha gli interi caratteristici

$$m_{rs} = \sum_{i=1}^{p} (g_{ri}\, g_{s\,p+i} - g_{r\,p+i}\, g_{si})$$

ed è collegata, nel senso spiegato al n. 10, alla corrispondenza simmetrica (50). Perciò gli invarianti $i_1\,,i_2\,,\ldots\,,i_p$ nominati al n. 13 sono pure invarianti della Φ ed hanno, per questa, i significati geometrici esposti ai nn. 10 e 11.

Se invece facciamo muovere il punto u lungo una varietà V_r, a r dimensioni, immersa in V_p, il punto u' che gli corrisponde per le (51) descriverà una varietà V'_r che, in generale, sarà una trasformata birazionale della V_r. Se questa si riduce alla V_1 che rappresenta i gruppi G_p della curva C aventi $p-1$ punti fissi, la V'_1 rappresenterà i G_p di una γ^1_p equivalente alla γ^1_n data. In generale se V_r è la immagine dei G_p con $p-r$ punti fissi, sarà V'_r la immagine di una γ^r_p equivalente alla serie γ^r_{rn}, multipla (n. 13) della γ^1_n data.

L'indice ν_r di questa γ^r_p è il numero delle intersezioni della V'_r, sua immagine, con una V_{p-r}, immagine dei G_p aventi r punti fissi; in simboli

$$\nu_r = [V'_r V_{p-r}] .$$

Ora fu già dimostrato [III, (39)] che questo numero è uguale al numero delle intersezioni di V'_r con r varietà Θ generiche del 1° ordine, diviso per $r!$:

$$\nu_r = \frac{1}{r!} [V'_r \Theta^r] .$$

D'altra parte il numero indicato nella nuova parentesi quadra si calcola subito se si applica alla varietà V'_r e alle varietà Θ la trasformazione $(1, \delta)$ definita dalle (47). La V'_r si trasforma nella V_r (in corrispondenza biunivoca con essa), presa insieme con un'altra varietà a r dimensioni che non interessa; le Θ si trasformano nelle varietà intermediarie Φ sopra nominate. Abbiamo dunque, applicando la (39) e la (36) della Nota III,

$$[V'_r \Theta^r] = [V_r \Phi^r] = \frac{1}{(p-r)!} [\Theta^{p-r} \Phi^r] = r! \, i_r$$

e infine

$$\nu_r = i_r .$$

Si conclude che l'invariante i_r della serie data γ^1_n uguaglia l'indice della γ^p_r equivalente alla γ^r_{rn} multipla della γ^1_n.

Alla γ^r_p *equivalente* si può sostituire la γ^r_p *residua*, giacchè nella rappresentazione analitica si passa dall'una all'altra serie mutando segno ai coefficienti ϱ_{hl} delle (47); con ciò cambiano segno anche i coefficienti $\bar{\varrho}_{hl}$ delle (48), ma non muta il determinante (51) dal quale solo dipendono gli invarianti i_h. Se si ricorda ora il n. 12, si conclude:

Data una serie γ^1_n sopra una curva di genere p, si formino le serie $\gamma^2_{2n}, \gamma^3_{3n}, \ldots$ riunendo i gruppi di quella a coppie, a terne, ... Il numero dei gruppi della γ^r_{rn} che appartengono ad una serie lineare $g^{r(n-1)}_{r(n-1)+p}$ generica è dato dall'invariante i_r della γ^1_n.

L'interesse del carattere geometrico in esame, per $r = 1$, fu da me segnalato per tutt'altra via fin dal 1906. Più tardi (1913) il Comessatti [1] ha preso in considerazione gli analoghi caratteri per $r = 2, 3, \ldots, p$ ed ha dimostrato alcune proprietà di questi numeri. La notevole interpretazione analitica stabilita dall'ultimo teorema fa vedere che essi forniscono effettivamente i caratteri più importanti di una serie algebrica, e che in funzione di questi converrà ormai esprimere tutti gli altri caratteri della serie.

15. Sarebbe facile, partendo dalla definizione analitica degli invarianti i_r, ritrovare le proprietà date dal Comessatti per via diversa. Preferisco esporre qui un'altra interpretazione analitica degli invarianti.

Sappiamo già che la serie γ_p^r, residua della γ_{rn}^r, è descritta dal gruppo $\eta_1, \ldots, \eta_p$ definito da

$$j_h(\eta_1) + \cdots + j_h(\eta_p) = -\sum_{\alpha=1}^{r} [\varrho_{h1} j_1(\zeta_\alpha) + \cdots + \varrho_{hp} j_p(\zeta_\alpha)] + \varrho_h ,$$

al variare degli r punti $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$. L'indice della γ_p^r, ossia il numero dei gruppi contenenti r punti fissi $\eta_1, \ldots, \eta_r$, è il numero delle soluzioni delle p equazioni (o congruenze) scritte, ove si considerino incogniti i punti $\zeta_1, \ldots, \zeta_r, \eta_{r+1}, \ldots, \eta_p$. Dunque:

Si formino le p equazioni a p incognite

$$(52) \quad \sum_{\alpha=1}^{r} [\varrho_{h1} j_1(\zeta_\alpha) + \cdots + \varrho_{hp} j_p(\zeta_\alpha)] + j_h(\eta_{r+1}) + \cdots + j_h(\eta_p) = \text{cost.}$$

Perchè il sistema ammetta un numero finito di soluzioni è necessario che, mentre ζ_α descrive un ciclo sulla superficie di Riemann, il primo membro della (52) *aumenti di un periodo; devono perciò verificarsi le* (46); *restano allora determinati gli interi g_{hl} e, mediante questi, gli invarianti i_r* (n. 13). *In tale ipotesi il sistema* (52) *ammette i_r sistemi di soluzioni $\zeta_1, \ldots, \zeta_r, \eta_{r+1}, \ldots, \eta_p$, ove non si badi all'ordine delle ζ, nè all'ordine delle η.*

Il risultato classico relativo al problema di inversione di Jacobi si ritrova se $\varrho_{hh} = 1$, $\varrho_{hk} = 0$ $(h \neq k)$. Era pur noto (Humbert, Scorza) il caso $r = p$, ove $i_p = \| \pi_{hl} \|$.

[1] *Sulle serie algebriche...*, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. 36.

Fisica terrestre. — *Sulla profondità dei ghiacciai.* Nota III del Socio Carlo Somigliana.

III.

Profili di 2° ordine.

Consideriamo il caso in cui la velocità è massima nel punto medio della sezione, e sia v_0 il suo valore determinato dall'osservazione. Supposto noto questo solo elemento, presa l'origine nel punto medio stesso, l'espressione v della velocità superficiale, indicando con L la semilarghezza, sarà

$$v = \varphi(y) = v_0 \left(1 - \frac{y^2}{L^2}\right)$$

e secondo la nostra teoria l'espressione di u sarà della forma (supposto $u_f = 0$)

$$u = v_0 - \frac{v_0}{L^2}(y^2 - z^2) - \frac{1}{2} H z^2$$

che ponendo

$$v_0 = \frac{1}{2} H k^2 \qquad \frac{1}{2} H - \frac{v_0}{L^2} = \frac{1}{2} \frac{H k^2}{M^2}$$

diviene

$$u = \frac{1}{2} H k^2 \left(1 - \frac{y^2}{L^2} - \frac{z^2}{M^2}\right) \tag{10}$$

ove le costanti k ed M sono legate dalla relazione

$$\frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2} = \frac{1}{k^2}\,. \tag{11}$$

Il profilo è quindi dato dalla semiellisse di equazione

$$\frac{y^2}{L^2} + \frac{z^2}{M^2} = 1\,. \tag{12}$$

Siccome H è una costante conosciuta

$$H = \frac{1}{\mu} \varrho g \operatorname{sen} \alpha$$

la costante k sarà conosciuta mediante il valore della velocità superficiale massima v_0, e la M che dà la profondità massima sarà determinata dalla relazione (11). Nella quale quindi dovrà essere

$$\frac{H}{2 v_0} - \frac{1}{L^2} = \frac{\varrho g \operatorname{sen} \alpha}{2 \mu v_0} - \frac{1}{L^2} > 0\,. \tag{13}$$

Qualora questa diseguaglianza non fosse soddisfatta il profilo ellittico non sarebbe possibile, la (12) rappresenterebbe un'iperbole, inammissibile pel nostro problema.

Questa soluzione del problema del movimento di un ghiacciaio è la sola, che sia già stata considerata. Di essa si è servito il sig. Weinberg per la determinazione teorica del coefficiente d'attrito, nel lavoro citato. Dalle formole precedenti si ha infatti

$$\mu = \frac{\varrho g \operatorname{sen}\alpha}{2 v_0} \frac{L^2 M^2}{L^2 + M^2} \tag{14}$$

formola che può servire a determinare μ, quando siano note v_0 ed M, cioè la velocità massima superficiale e la profondità massima. Reciprocamente quando siano note μ e v_0 abbiamo per la profondità massima

$$M = \frac{L\sqrt{2\mu v_0}}{\sqrt{\varrho g \operatorname{sen}\alpha L^2 - 2 v_0 \mu}} . \tag{15}$$

Per la velocità superficiale media si trova subito

$$v_m = \frac{1}{L}\int_0^L v\, dy = \frac{2}{3} v_0$$

e per la profondità media

$$z_m = \frac{1}{L}\int_0^L z\, dy = \frac{\pi}{4} M = \frac{L\sqrt{3\mu v_m}}{\sqrt{\varrho g \operatorname{sen}\alpha L^2 - 3 v_m \mu}} \frac{\pi}{4} .$$

Si ha quindi fra la velocità media e la profondità media una relazione della forma

$$v_m = \frac{a z_m^2}{b + c z_m^2} \tag{16}$$

ove a, b, c sono costanti, i cui valori risultano dalla formola precedente:

$$a = \varrho g \operatorname{sen}\alpha L^2 \qquad b = 3\mu L^2 \frac{16}{\pi^2} \qquad c = 3\mu .$$

Le relazioni fra velocità superficiale media e profondità media sono state studiate, in base a dati d'osservazione, da Blümcke A., Hess H. [1] e rappresentate mediante una curva che ha l'andamento di quella rappresentata dalla equazione (16), cioè una curva che col crescere della profondità si avvicina assintoticamente alla retta

$$v = \frac{a}{c} = \frac{1}{3} \frac{\varrho g \operatorname{sen}\alpha}{\mu} \frac{16}{\pi^2} L^2 .$$

[1] Blümcke u. Hess, *Untersuchungen am Hintereisferner*. Wissenschaftliche Ergänzungshefte zur Zeitschrift des D. u. Oe. Alpenvereins. München, 1899, pag. 64.

IV.

Profili di 3° ordine.

Il calcolo del paragrafo precedente non è applicabile, nemmeno in via di approssimazione, quando il massimo della velocità superficiale non cada nel centro della sezione. Anche la curva del profilo non potrà in questo caso essere simmetrica. Può essere utile allora una curva cubica. Potremo porre l'origine ad un estremo della sezione, e la velocità superficiale sarà rappresentata da una funzione di 3° ordine

$$v = \varphi(y) = A_1 y + A_2 y^2 + A_1 y^3$$

a radici reali, che potremo quindi porre senz'altro sotto la forma

$$v = \frac{1}{2} H k y \left(1 - \frac{y}{L}\right)\left(1 - \frac{y}{M}\right) \tag{17}$$

dove con L indichiamo la larghezza del ghiacciaio con M una costante positiva, che potremo sempre supporre maggiore di L, poichè le radici dell'equazione $\varphi(y) = 0$ essendo 0, L, M, e dovendo M essere esterna all'intervallo (0, L), potremo sempre supporre che la direzione positiva dell'asse y sia quella da 0 ad M. La k è pure una costante che determineremo in seguito, al pari di M. Abbiamo quindi *due costanti* di cui disporre, in base ai dati d'osservazione, nella espressione della velocità superficiale.

Ciò posto, dalle considerazioni generali precedenti risulta subito per l'espressione della velocità u la formola seguente, ove N è una nuova costante,

$$u = \frac{1}{2} H k \left\{ y - \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{M}\right) y^2 - \frac{z^2}{N} + \frac{1}{LM}(y^3 - 6 y z^2) \right\} \tag{18}$$

colla condizione

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{M} + \frac{1}{N} = \frac{1}{k} \tag{19}$$

poichè deve essere soddisfatta l'equazione

$$\Delta_2 u = - H .$$

Il profilo è rappresentato in questo caso da una cubica e l'equazione $u = 0$ ci dà allora subito per la profondità z in un punto qualsiasi y della sezione, la formola assai semplice

$$z^2 = N \frac{y(y - L)(y - M)}{6 N y + L M} . \tag{20}$$

Conviene ora esaminare come possano essere determinate le costanti che compaiono nelle formole precedenti mediante i dati delle osservazioni.

La cubica, rappresentata dalla (17), ci dà la *curva della velocità superficiale* la quale è composta di un unico ramo, attraversa l'asse delle y nei punti $y = 0\ ,\ L\ ,\ M$ e ci dà un arco posto dalla parte delle v positive, che è quello che corrisponde ai dati osservati. Per l'angolo ω della tangente coll'asse y abbiamo

$$\operatorname{tg} \omega_y = \frac{dv}{dy} = \frac{1}{2} H k \left(1 - 2\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{M}\right) y + \frac{3y^2}{LM}\right)$$

quindi nei due punti estremi della sezione

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{1}{2} H k \qquad \operatorname{tg} \omega_L = \frac{1}{2} H k \left(\frac{L}{M} - 1\right).$$

Siccome i due angoli $\omega_0\ ,\ \omega_L$ possono essere direttamente misurati sulla curva

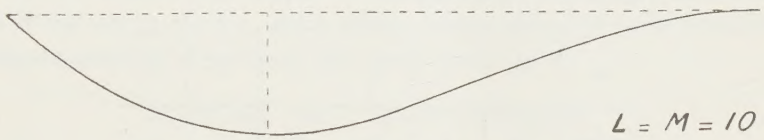

Fig. 3 (Curva della velocità).

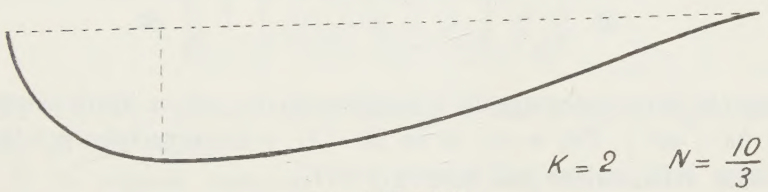

Fig. 4 (Profilo).

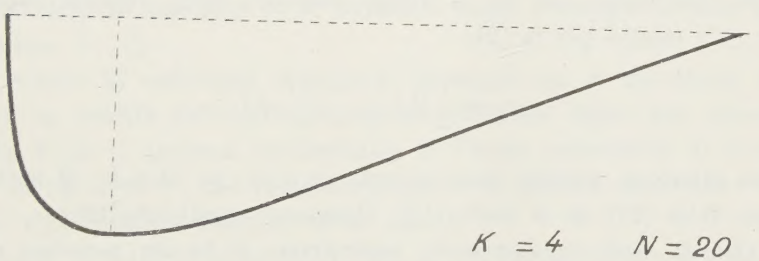

Fig. 5 (Profilo).

della velocità superficiale, così, quando ne sia ammissibile una rappresentazione colla cubica, le due relazioni precedenti dànno i valori di k e di M. La (19) determinerà N e tutto allora sarà noto nella formola (20) che dà il profilo del fondo.

Per $M = L$ si ha $\omega_L = 0$, cioè la curva-velocità è tangente all'asse della sezione. È questa una particolarità che si osserva in qualcuna delle curve rilevate e le formole in questo caso possono determinare le proprietà del profilo, a cui corrisponde questa particolarità (v. fig. 3).

Ma la determinazione delle costanti può farsi anche, e sarà più utile dal punto di vista pratico, mediante la posizione del massimo della velocità superficiale, ed il valore di questo massimo di velocità.

Poniamo $y = \alpha L$; il valore di α corrispondente al massimo di v è dato dall'equazione

$$3\alpha^2 \frac{L}{M} - 2\left(1 + \frac{L}{M}\right)\alpha + 1 = 0$$

da cui

$$\frac{M}{L} = \frac{3\alpha^2 - 2\alpha}{2\alpha - 1} = \psi(\alpha). \tag{21}$$

Questa formola dà M quando sia nota la posizione del massimo, cioè α. Ora si ha la seguente corrispondenza di valori

α	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	∞
$\psi(\alpha)$	0	1	∞	0	1	∞
M	0	L	∞	0	L	∞

Siccome M deve essere uguale o maggiore di L, così α dovrà essere compreso fra $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{2}$. Per $\alpha = \frac{1}{3}$ si ha $M = L$, e la curva-velocità è tangente alla linea della sezione nell'estremo $y = L$.

Per $\alpha = \frac{1}{2}$ si ritorna al caso del profilo ellittico già considerato.

Se indichiamo con v_M il valore massimo della velocità superficiale dalla (17) risulta per la (21)

$$v_M = \frac{1}{2} H k \frac{(1-\alpha)^2}{2 - 3\alpha} \alpha L. \tag{22}$$

Questa relazione, quando siano misurati α e v_M, ci darà k; M sarà determinato dalla (21) ed N dalla (19). Possiamo quindi concludere:

Quando nella curva-velocità superficiale si ha un massimo che non è nel punto di mezzo della sezione, e dista da un estremo non meno di un terzo della lunghezza della sezione, sarà possibile una rappresentazione della velocità stessa mediante un arco di una curva di 3° ordine, ed il profilo corrispondente sarà dato pure da una curva di 3° ordine, rappresentata dalla equazione (20).

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota VII del Corrisp. Francesco Severi.

16. Il teorema con cui si chiude la Nota VI [1] offre un criterio di equivalenza algebrica di due curve C_1, C_2. Ho già dato in passato (Math. Annalen, 1906) due altri criterî per la dipendenza algebrica di curve tracciate sopra una superficie; e cioè:

1) *Un criterio geometrico*: La condizione necessaria e sufficiente affinchè le due curve C_1, C_2, dello stesso ordine, tracciate sulla superficie F, sieno algebricamente dipendenti, per modo che risulti:

$$\lambda C_1 \equiv \lambda C_2 \text{ (per } \lambda \text{ intero conveniente)},$$

è che sieno soddisfatte le condizioni aritmetiche:

$$[C_1, C_1] = [C_1, C_2] = [C_2, C_2],$$

ove $[C_1, C_1]$, $[C_2, C_2]$ sono i gradi virtuali di C_1, C_2 e $[C_1, C_2]$ il numero dei punti ad esse comuni.

2) *Un criterio trascendente*: La condizione necessaria e sufficiente per l'equivalenza algebrica delle C_1, C_2, aventi lo stesso ordine, è che esista su F un integrale semplice di 3ª specie, il quale possegga le sole curve logaritmiche C_1, C_2.

Il criterio 2) costituisce il ponte di passaggio fra la mia teoria della base per la totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica F ed il teorema fondamentale di Picard concernente il minimo numero di curve di F, che possono assegnarsi ad arbitrio come curve logaritmiche d'un integrale semplice di 3ª specie.

Orbene, *il criterio trascendente del n. 15 costituisce il ponte di passaggio fra la teoria della base e la nozione di curve primitive introdotta da Poincaré.* È ciò che ci proponiamo di mostrare nel numero successivo.

17. Su F sieno tracciate t curve algebriche $C_1, C_2, \ldots, C_t$. Sieno $s_{1i}, s_{2i}, \ldots, s_{ti}$ le somme fornite dall'integrale u_{q+i} $(i = 1, \ldots, p-q)$ rispettivamente nei gruppi $(C_1, A), (C_2, A), \ldots, (C_t, A)$. Cerchiamo sotto quali condizioni è possibile determinare t numeri interi $\mu_1, \ldots, \mu_t$ (positivi, negativi o nulli, ma non tutti nulli), tali che per ogni curva A del fascio $|A$,

[1] Questi Rendiconti, pag. 328.

considerato nel n. 15, sussistano le relazioni:

$$(25) \qquad \mu_1 s_{1i} + \cdots + \mu_t s_{ti} \equiv 0 \text{ (modd. } 2p \text{ periodi non ridotti)} \quad (i = 1, 2, \ldots, p-q).$$

Circolando attorno ad un valor singolare $y = b$ la somma s_{ji} aumenta di $\lambda_{ji}\omega_i(y)$, ove λ_{ji} è un conveniente intero ed $\omega_i(y)$ è il periodo di u_{q+i} al ciclo nullo τ avvolgente i due punti critici ξ_1, ξ_2, che tendono al punto di contatto del pian tangente $y = b$, col tendere di y a b (n. 10, Oss. 2ª). Sicchè, se è possibile di scegliere gl'interi $\mu_1, \ldots, \mu_t$ non tutti nulli, in guisa tale che sia:

$$\lambda_{1i}\mu_1 + \cdots + \lambda_{ti}\mu_t = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p-q),$$

l'espressione $\sum_j \mu_j s_{ji}$ si conserva olomorfa attorno ad $y = b$.

Analoghi gruppi di equazioni di condizione per $\mu_1, \ldots, \mu_t$ si avranno in corrispondenza agli altri valori singolari di y, qualora si voglia che l'espressione $\sum_j \mu_j s_{ji}$ si conservi olomorfa dovunque, cioè ch'essa riducasi ad una costante. Ora, se t è maggiore del numero $N(p-q)$ delle equazioni di condizione che si vengono così a scrivere — ove N è la classe della superficie F — si potranno di certo determinare valori interi non tutti nulli delle μ soddisfacenti al complesso di quelle equazioni; e così per tali valori delle μ saranno soddisfatte le relazioni:

$$\mu_1 s_{1i} + \cdots + \mu_t s_{ti} \equiv c_i,$$

ove le c_i sono costanti. Ma per $y = \infty$ le somme s_{ji} sono identicamente nulle (n. 6), dunque è $c_i = 0$; e quindi per quei valori non tutti nulli degl'interi μ sono soddisfatte le (25).

Le s_{ji} $(i = 1, \ldots, p-q)$ sono $p-q$ funzioni normali di Poincaré (n. 10. Oss. 3ª), relative alla curva C_j: e precisamente quelle che provengono dagl'integrali $u_{q+1}, \ldots, u_p$.

Le funzioni normali r_{jh} $(h = 1, \ldots, q)$ che provengono dagl'integrali $I_1, \ldots, I_q$, son costanti, definite a meno di multipli interi dei $2q$ periodi ridotti.

Il ragionamento svolto ci dice che, data F, esiste un intero $\varrho \geq 1$, tale che su F si possono tracciare ϱ curve $C_1, \ldots, C_\varrho$, le quali forniscano, rispetto agl'integrali u_{q+i}, somme s_{ji} $(j = 1, \ldots, \varrho)$ linearmente indipendenti, nel senso che non sussista fra esse alcuna relazione del tipo $\sum_j \mu_j s_{ji} \equiv 0$, per valori *interi non tutti nulli* delle μ; ma che data un'altra curva qualsiasi C di F e indicate con s_i le somme fornite da C mediante gl'integrali u_{q+i} $(i = 1, \ldots, p-q)$, sussistano, per valori interi delle $\mu_1, \ldots, \mu_\varrho$, le relazioni:

$$(26) \qquad \mu s_i \equiv \mu_1 s_{1i} + \cdots + \mu_\varrho s_{\varrho i} \qquad (i = 1, \ldots, p-q),$$

con $\mu \neq 0$. Si ottiene così il teorema:

Si posson fissare sopra una data superficie F ρ *curve* $C_1, \ldots, C_\rho$ (*curve primitive*), *ove* ρ *è un carattere dipendente solo da* F, *tali che le funzioni normali di Poincaré relative ad una curva* C *qualsiasi di* F *e corrispondenti agl'integrali* $u_{q+1}, \ldots, u_p$, *i quali provengono dal sistema aggiunto al sistema delle sezioni piane di* F, *si esprimono mediante combinazioni lineari a coefficienti numerici razionali delle analoghe funzioni normali spettanti a* $C_1, \ldots, C_\rho$. *Le altre funzioni normali inerenti a* C *e corrispondenti agl'integrali semplici di 1ª specie* $I_1, \ldots, I_q$, *che appartengono ad* F, *riduconsi a costanti.*

Questo è sostanzialmente il risultato di Poincaré. Il criterio del n. 15 ci dice che le curve $C_1, \ldots, C_\rho$ per cui non valgono relazioni del tipo (25) ($t = \rho$) per valori non tutti nulli delle μ, son curve algebricamente indipendenti, e che ogni curva C di F, in quanto per essa valgano le relazioni (26). con $\mu \neq 0$. è algebricamente dipendente da $C_1, \ldots, C_\rho$. Si ha così di nuovo il teorema fondamentale della teoria della base:

Su F *posson tracciarsi* ρ *curve algebricamente indipendenti, tali che ogni altra curva di* F *sia algebricamente dipendente da quelle.*

Fisica terrestre. — *Gradiente termico e accelerazione verticale nell'atmosfera.* Nota del Socio Luigi de Marchi.

Nella precedente Nota ho accennato alla necessità di tener conto, nel calcolo del gradiente adiabatico, invece che dell'equazione dell'equilibrio idrostatico, di quella del moto verticale

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma - \alpha\gamma f(w) + \frac{\gamma}{g}\frac{dw}{dt}$$

colla quale l'espressione del gradiente termico verticale sarebbe (prescindendo dagli scambi d'energia coll'esterno)

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{A}{c_p}\left[1 + \frac{1}{g}\frac{dw}{dt} - kf(w)\right]. \tag{1}$$

La funzione d'attrito $f(w)$ è ignota; ammettendola, come in altri casi della meccanica, una funzione quadratica della velocità. il termine d'attrito diminuirebbe in ogni caso il gradiente. Invece il termine d'accelerazione lo aumenterebbe in caso di moto ascendente accelerato o discendente ritardato, lo diminuirebbe nei due casi contrarî.

Dato il piccolo valore del coefficiente d'attrito, e il valore generalmente molto piccolo dell'accelerazione verticale rispetto alla g, questi termini di correzione sono comunemente ritenuti trascurabili. È a notare tuttavia che

le misure di velocità verticale, ottenute con lancio di palloni piloti, non permettono una valutazione sicura dell'accelerazione *attuale* in tutti i punti della verticale, ma dànno soltanto valori approssimati dell'accelerazione *media* su tratti di 100, 150 e più metri. Il più breve intervallo fra due osservazioni successive al teodolite è infatti il minuto primo e la velocità ascensionale del palloncino è sempre fra 100 e 200 metri al minuto. Inoltre le misure sono di regola compiute con tempo sereno e aria tranquilla, senza intensi movimenti verticali. Fra le misure a mia disposizione (1) trovo un solo caso di lancio di pallone con tempo burrascoso (*boïg*) ed è quello di Hergesell del 7 giugno 1913, che diede i seguenti dati medi:

Altezze m.	Velocità ascensionale $^{m}/_{mi}$	Velocità verticale dell'aria $^{m}/_{sec}$
0-864	198	+ 1.72 ascendente
864-956	48	— 0.75 discendente
956-1192	236	+ 2.38 ascendente

Essendo la velocità di partenza dal suolo, ove $w = 0$, di 93 $^{m}/_{mi}$, nel primo strato la velocità assunse valori certo molto maggiori di 200, subendo quindi nel passaggio al secondo un rallentamento pure di oltre 200 (oltre 3 $^{m}/_{sec}$) che può essersi anche verificato per salto in un brevissimo tratto e in un intervallo di pochi secondi. Lo stesso dicasi, a maggior ragione, per il passaggio dal secondo al terzo strato, dove la variazione di velocità media può essere stata di 300 $^{m}/_{mi}$ (5 $^{m}/_{sec}$). Che nell'atmosfera si verifichino salti di velocità verticale, come si verificano per la velocità orizzontale, per la temperatura e per l'umidità, non si può mettere in dubbio, perchè risponde anzitutto al carattere più o meno turbolento dei moti dell'aria. Inoltre una rapida corrente ascendente viene a rallentarsi in alto per l'inerzia degli strati sovrastanti in cui si genera per compressione un gradiente barico efficace $\left(-\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma\right)$ discendente. Questo rallentamento può avvenire in modo brusco, come lo dimostra l'espandersi del *pino vulcanico* (2). Ad esso deve corrispondere una diminuzione del gradiente termico, che potrà essere o brusca, determinando uno strato di salto, o lenta, segnando un passaggio più graduale dalle condizioni inferiori dell'aria ascendente a quelle superiori dell'aria ferma. Ciò potrebbe in particolare spiegare i varî tipi di passaggio dalla troposfera alla stratosfera: la brusca inversione di tempera-

(1) Le misure più rigorose e complete di velocità verticale sono quelle fatte con due teodoliti da Gamba e Viterbi a Pavia (Annali Uff. Centr. Meteor. XXXVI, parte 1ª, 1914) e quelle di Hergesell con un teodolite solo a micrometro e con base graduata pendente dal pallone (Beiträge zur Phys. d. freien Atmosph., vol. VI, 1914, pag. 187).

(2) Wegener A., *Thermodynamik der Atmosphäre*. Leipzig, 1911, pag. 140 seg.-pag. 213.

tura o lo strato a gradiente minore, che si interpone fra l'alta troposfera a forte gradiente e la stratosfera a gradiente nullo (1).

Una accelerazione ascendente si determina quando si condensi *improvvisamente* una certa quantità di vapore (2) a una certa altezza, come deve verificarsi nel caso di aria soprasatura. Allora per lo sviluppo improvviso di calore si verifica una rapida espansione dello strato condensante con improvviso aumento di tensione interna, che però rapidamente si mette in equilibrio colla pressione esterna p. Siamo come nel caso di una esplosione, nel quale il lavoro esterno dell'unità di peso è $p(v_2 - v_1)$, essendo v_1 il volume specifico iniziale e v_2 il volume finale. Indicando con T_1, T_2 le relative temperature assolute, l'equazione del primo principio è

$$c_v(T_2 - T_1) + Ap(v_2 - v_1) = rq$$

ove q è il peso di vapore condensato nell'unità di peso d'aria, r è il calore di vaporizzazione dell'acqua, c_v il calore specifico a volume costante.

L'aria subisce prima una rapida dilatazione per improvviso aumento della tensione interna, e poi una parziale contrazione per mettersi in equilibrio colla pressione esterna: come risultato finale essa si è dilatata a pressione costante e si potrà scrivere

$$v_2 - v_1 = \alpha v_1(T_2 - T_1) \quad \text{ossia} \quad T_2 - T_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\alpha\gamma_2}$$

dove γ_1, γ_2 sono i pesi specifici iniziale e finale, $\alpha = 1/273$. L'equazione precedente si può quindi scrivere, ponendo $p = R\gamma_1 T_1$,

$$\left(\frac{c_v}{\alpha} + ART_1\right)(\gamma_1 - \gamma_2) = \gamma_2 rq .$$

Ma $\gamma_1 - \gamma_2$ non è che la forza ascensionale che l'unità di volume assume per la dilatazione, e che le imprimerà l'accelerazione (essendo $\frac{\gamma_2}{g}$ la massa dell'unità di volume nell'aria dilatata):

$$\frac{dw}{dt} = \frac{grq}{273\,(c_v + A\,R\alpha\,T_1)}$$

o, approssimativamente, dato che la temperatura si scosti non molti gradi dallo 0°, com'è nelle nubi basse e medie,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{grq}{273 \cdot c_p} . \qquad (2)$$

(1) Schmauss A., *Die Substratosphäre* (Beiträge zur Phys. d. freien Atmosp., VI, pag. 153, 1914).

(2) Nel caso di condensazione progressiva in una corrente d'aria satura si ottiene la formola nota del gradiente in aria satura coi termini di correzione accennati sopra e nella Nota precedente.

Poichè non si può stabilire fino a quale grado di soprasaturazione possa giungere il vapore in una corrente ascendente, non possiamo, per la valutazione di q, che fondarci su apprezzamenti indiretti (1). Un indizio ci è dato dall'intensità delle piogge temporalesche, che in alcuni casi raggiungono parecchi millimetri e in casi eccezionali parecchi centimetri d'altezza in pochi minuti. Una pioggia di mezzo centimetro rappresenta 5000 gr. per mq. e, supponendo che la nube temporalesca abbia lo spessore di un chilometro, essa rappresenterebbe una condensazione di 5 gr. per metro cubo, ossia, alla pressione di 600 mm., circa 5 gr. per Kg., oltre la massa d'acqua che rimane sospesa nella nube, in goccioline più minute. Possiamo quindi ammettere che il valore di q possa essere, anche in casi non eccezionali, di parecchi grammi. Ponendo $q = 0{,}005$, $r = 607$, $c = 0{,}238$, la condensazione totale di 5 gr. produrrebbe un'accelerazione verticale ascendente di 0,53 $^{m}/_{sec}$; per valori minori o maggiori di q essa diminuisce o cresce proporzionalmente.

Con tale accelerazione l'unità di volume d'aria si solleverebbe a condensazione compiuta, e continuerebbe ad innalzarsi, con accelerazione sempre minore finchè trova lo strato superiore dove $\gamma = \gamma_2$, oltre il quale continuerebbe ad innalzarsi con moto ritardato. Ponendo

$$\gamma_2 = \gamma_1 \, 10^{-\frac{h}{18400}}$$

ove h è il dislivello fra lo strato a peso specifico γ_2 e quello a γ_1, si ha approssimativamente

$$h = 18400 \operatorname{Log} \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 18400 \operatorname{Log} \left(1 - \frac{\alpha r q}{c_p}\right) = 18400 \cdot \mathrm{M} \, \frac{\alpha r q}{c_p}$$

dove M è il modulo dei logaritmi (0,43429). Per $q = 0.005$ si avrebbe $h = 375$ circa. Poichè nei grandi temporali la pioggia data dal nembo temporalesco è anche due o più volte quella da noi supposta di mezzo centimetro e lo spessore del nembo, nella sua parte inferiore più densa, è minore di un chilometro, la q può ammettersi anche doppia, tripla etc. di

(1) Bisogna tener conto del fatto che la condensazione in una massa d'aria satura o soprasatura è limitata dal calore da essa sviluppato. Si leggano in proposito le belle Memorie 3ª e 4ª di von Bezold sulla Termodinamica dell'atmosfera (Sitzungsberichte Akad. Berlin, 1890, 1892; Abhandlungen, Braunschweig 1906) dove è data una costruzione grafica per il calcolo della q in corrispondenza a varî gradi di soprasaturazione. A 600 mm. di pressione (circa 2000 m. d'altezza) una massa d'aria a 0° contenente 8, 9, 10, 11 gr. di vapore per chilogrammo ne condenserebbe rispettivamente solo 1,5; 2; 2,5; 3 circa. Rimane tuttavia a dimostrare la possibilità che il vapore si mantenga soprasaturo nell'aria ricca di pulviscolo: il Bezold (Abhandl. pp. 191-192) ne dà qualche indizio. Bisogna anche osservare che l'interposizione di nubi può, arrestando la radiazione solare, determinare improvvisi abbassamenti di temperatura e quindi rapide condensazioni anche senza soprasaturazione.

quella supposta e il dislivello h superare anche sensibilmente il chilometro. L'aria impiega parecchi minuti a percorrerlo, nei quali può assumere velocità verticali anche di parecchie decine di metri al secondo. Ciò nell'ipotesi che il movimento possa svolgersi senza impedimenti: in realtà esso provocherà moti vorticosi coll'aria ambiente. Così si spiegano e la rapida spinta dei cumuli verso l'alto, e i moti turbolenti che in essi si generano, e le velocità verticali sopra gli 8 $^{m}/_{sec}$ necessarie per mantenere in sospensione le gocce più grosse, e per spezzarle generando, secondo la teoria di Simpson, la separazione delle elettricità e gli alti potenziali elettrici.

Le accelerazioni così generate non possono avere effetto sensibile sul gradiente termico verticale; non così il ritardo successivo che deve avvenire in modo molto rapido, spesso brusco, per l'inerzia degli strati sovrastanti. Già prima che arrivi la colonna ascendente questi, non cedendo abbastanza presto, sono compressi e spinti verso l'alto oltre il limite di condensazione del vapore che contengono, come dimostra la formazione delle *cappe* al di sopra e a qualche distanza dalla testa del cumulo (1). Questa compressione degli strati superiori deve generare un gradiente verticale discendente, che rallenta il moto ascensionale sottostante, il quale però è talvolta così energico che riesce ad attraversare la cappa e a sollevarsi centinaja e migliaja di metri sopra di essa. I netti lineamenti superiori dei cumuli che spesso hanno forma turrita, a piattaforma (2), dimostrerebbero però un brusco arresto del moto ascendente, al quale corrisponde un'accelerazione negativa che può essere di parecchi metri al secondo. Essa determinerebbe, in base alla (1), una brusca diminuzione del gradiente termico verticale, e forse anche una inversione di temperatura quale si verifica spesso al di sopra delle nubi.

(1) Wegener, *Thermodynamik der Atmosphäre*, pp. 213, 217 seg.; Crestani, *Le Cappe* (Bollett. bimens. della Soc. Meteor. ital., 1918).

(2) Ibid., pag. 208, tavv. VII, VIII.

Paleontologia. — *Silicospongie fossili della Liguria occidentale.* Nota del Socio C. De Stefani.

VIII.

Crocetta.

Probabilmente la stessa specie di *Lychniscosa* (se non diversa per presenza di spine) ho trovato in un luogo adiacente della stessa zona, alla Crocetta entro un grosso pezzo ceruleo macchiato di bianco, più calcareo della roccia precedente (Calcite, Opale, raro Quarzo, Sericite, cubetti di Limonite pseudomorfa), costituito da frantumi diversi.

Intreccio con andamento irregolare diretto in tutti i sensi: maglie con dimensioni alquanto diverse, prevalentemente quadrate, ma talora triangolari ed esagone; qualche volta quando furono convertite in calcite, il Quarzo ne occupa le cavità centrali.

Le maggiori Spicole, delle quali vedesi talora il canale interno, forse debolmente spinose, carattere che mancherebbe a Palazzo Doria, sono fornite di Lychnische, e queste espandendosi nei punti d'incrocio, lasciano in alcune maglie appena un foro circolare. Sottili *Epirhize* trasversali cinte da tessuto a losanga in serie un po' distorte intramezzate a quinconce da Aporhize circolari con reticolo periferico raggiato. Nella compagine parenchimale e dermale sono *Diactiniae*, *Pentactiniae*. Evvi qualche rara *Triaene* di Silicospongia *Tetractinellide*.

Ad una *Hexasterosa* diversa dalla *Lychniscosa* precedentemente descritta appartengono altri esemplari trovati nella stessa località della Crocetta. Ivi presi varî frammenti di un calcare molto siliceo, grigio scuro per materie carboniose, contenente varî cubetti di Limonite pseudomorfa, con sporgenze e vene di Silice grigio chiara a volte alquanto ferruginosa. Si direbbe costituito in molta parte di una Hexactinellide dictyonale convertita in parte in Calcite. L'intreccio si vede bene alla superficie esposta alle intemperie o leggermente acidulata; meno bene nelle sezioni sottili ed in queste con poca luce, quasi punto per trasparenza. Solo qualche piccola parte dell'intreccio notasi entro la Calcite: nelle sporgenze silicee è più grossolano e più confuso. Applicata ad un vetrino porta oggetti la superficie di un frammento parallelo alla stratificazione, e sottoposta all'acido la superficie libera, questa si scioglie abbondantemente, lasciando una fioritura, si direbbe una serie di

colonne verticali costituite da microscopici prismi piramidali di Quarzo concresciuti in mezzo al Calcare, irregolarmente aggruppati intorno ad un asse, aderenti fra loro alla base, paragonabile alle efflorescenze di ghiaccio uscenti l'inverno dalla superficie di una marna o di una argilla. Si prenderebbero a prima vista per residui di una *Lithistida*. Si tratta di una trasformazione cristallina del tessuto primitivo di silice colloide, le cui tracce in tal caso rimangono in gran parte scancellate: altra volta il tessuto fu convertito in calcite; il Quarzo riempie gli spazi vuoti e risponde, dirò così, alla parte negativa dell'intreccio. In tal caso sulle superfici acidulate, nei tratti più calcarei, regolari serie di microscopici puntini bianchi rispondono al centro delle microscopiche maglie, che allorquando il Calcare è completamente disciolto, scompaiono: così pure a volte vedesi la forma di grandi *Hexactiniae* isolate, forse di *Lyssacina*, trasformata in calcare, rimasta vuota in mezzo alla fioritura quarzosa.

Quando la dissoluzione dei frammenti è completa, essi si sfanno interamente lasciando un abbondante residuo di cristallini quarzosi con minutissimo pulviscolo limonitico e carbonioso.

All'esterno l'intreccio apparisce abbastanza regolare, rettangolare; non ho osservato Lychnische, nè spinosità. Raramente si vede qualche canale assile. L'intreccio microplerico interno è minutissimo e meno ben conservato perchè le Spicole più minute sono le prime a scomparire.

Talora le *Hexactiniae* agl'incroci si amplificano formando sottili espansioni che fanno rotonde le maglie.

Appaiono qua e là qualche *Hexactinia* isolata, *Pentactinia*, non che *Diactinia*.

In costa agli strati e nelle sezioni interne rispondenti, vedonsi Ostia di *Epirhize* inalanti, ovali, allungate secondo gli strati, allineate in serie alterne abbastanza regolari. Sono cinte dall'intreccio disposto in 6 o 7 giri, concentricamente a losanga, ben visibile in certi tratti, quasi a mo' di *Nummuliti*. Vi si accompagnano *ostia* minutissime come la capocchia d'un piccolo spillo.

Sulle superfici normali alla stratificazione vedonsi più nettamente, in quinconce con le *Epirhize*, *Postica* di *Aporhize* esalanti, circolari od appena ellittiche con piccolo anello d'intreccio radiante all'intorno, raramente ramificato; perciò diverso da quello che circonda le *Epirhize*: esso proviene dalla superficie esterna e può notevolmente restringere o anche superare le aperture delle predette *Postica*.

Non avendo osservato Lychnische sarebbe una *Hexasterophora* della Tribù *Hexasterosa*, Subtribù *Inermia*. Non manca di qualche affinità con le *Craticularia* che sono *Hexast. incertae sedis*; ma trattandosi di esemplari così mal conservati come i nostri le determinazioni sono necessariamente incerte. Qualora si trattasse di una *Lychniscosa*, per le *Epirhize* trasversalmente ovali la paragonerei ad una *Sporadoscinia* Schrammen: per

la forma delle *Epirhize* e delle *Aporhize*, non però per l'intreccio circostante a queste ultime che è più radiale e più regolare, e per l'intreccio generale che è pur più regolare, la comparerei anche col *Ventriculites radiatus* Mantell nel quale furono unite parecchie specie di tutta la Creta superiore.

Gli Spongiari della Biscazza che sono quasi coetanei a quelli di San Martino più antichi hanno affinità ma sono *Lychniscosa*: inoltre i primi hanno intreccio più irregolare ed i secondi hanno Epirhize ed Aporhize di dimensioni minori.

Inclusi alla presente specie oltre a qualche *Oxyhexactinia* probabilmente appartenente ad una *Hexasterophora Lyssacina*, vi sono qualche Spicola di *Monactinellidae*, qualche *Tetraxane* di *Tetractinellidae* e rari Rabdi di *Rhizomarinae* e *Megarhizidae*.

Del resto attesa l'incompletezza dei caratteri osservati e l'imperfetta conservazione le *Lychniscosa* e l'apparente *Hexasterosa* di questi luoghi potrebbero appartenere ad unica specie.

Casa Bisognaschi.

Poco lontano dalla Crocetta, presso casa Bisognaschi sulla rotabile del Naso di Gatto, entro la schisto lucente è un calcare rossastro, prevalentemente siliceo (Calcite. Quarzo con inclusioni liquide, Sericite, rara Clorite. Ematite. Limonite, raro Rutilo, microliti di Apatite, pulviscolo carbonioso), bene stratificato con tracce di una *Hexasterosa* apparentemente identica a quella della Crocetta. Intreccio dictyonale a piccole maglie quadrate di vario ordine. Macrosclere di rado ben visibili, senza Lychnische, con minutissimo intreccio di Microsclere raramente integre, meglio visibile nelle parti limonitiche ed entro il Quarzo, anche a traverso la Clorite a larghe lamine, meno visibile entro la Calcite. Canaletti di Aporhize circolari con intreccio periferico radiale.

Nelle sezioni e nel residuo della soluzione silicea *Hexactiniae* isolate, *Diactiniae* ed un *Uncino* residuo di qualche *Uncinataria*, se non forse proprio della specie.

Qualche grande *Oxyhexactinia* isolata appartiene ad una *Hexasterophora Lyssacina*.

Sotto Casa Doria.

Sempre poco lontano dalla Crocetta, al bivio delle strade sotto Casa Doria sono Schisti lucenti, di colore plumbeo, senza calcare (Opale, Quarzo, Sericite, Pirite, Limonite, Rutilo, materia carboniosa) con piccole lenti chiare, puramente silicee costituite da una *Hexasterosa* con intreccio hexactinico dictyonale liscio senza spine, senza Lychnische, a maglie quadrate, parallelogramme, talora triangolari, ed in varî casi rotondeggianti per espansione

dei nodi d'intersezione delle *Hexactiniae* maggiori e minori nelle parti probabilmente dermali o gastrali. Questo intreccio apparisce più irregolare intorno ai canali acquiferi: nel rimanente è abbastanza regolare.

Per entro alle sezioni sottili lo si vede meglio, secondo il solito, specialmente quello più minuto, nelle parti limonitiche, essendo le Spicole trasformate in Pirite, quindi in Limonite.

A volte la Limonite, come il Quarzo e la Sericite occupano le parti centrali delle maglie costituite da Silice colloide, la qual cosa si vede bene al Polariscopio a Nicols incrociati. Solite piccole Epirhize con reticolo circostante a losanghe schiacciate trasversali, in serie alternanti a quinconce con Apochize circolari, talora in mezzo ad intreccio formato da minutissime maglie con forellini circolari come alla costa di S. Alberto.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla « piccola variazione » di una curva piana algebrica reale*. Nota di Luigi Brusotti, presentata dal Corrisp. L. Berzolari [1].

1. Sia C^n una *curva piana algebrica reale* (d'ordine n) che non abbia altre singolarità all'infuori di punti doppî ordinarî. Fra tali punti doppî quelli reali saranno nodali od isolati.

La parte reale di C^n sarà una *curva grafica* Γ, composta in generale di circuiti e di punti isolati. I punti doppî nodali saranno o doppî per un circuito o comuni a due circuiti distinti.

È noto allora [2] che cosa si intenda per « *piccola variazione* » *topologica* di Γ, nel senso più largo qui usato, nel senso cioè che essa conservi eventualmente alcuni dei punti doppî, sciogliendo soltanto i rimanenti.

Non risulta peraltro se una « piccola variazione » topologica di Γ topologicamente individuata possa sempre tradursi in una « *piccola variazione* » *algebrica* di C^n, cioè se la trasformata Γ_1 di Γ sia sempre topologicamente identificabile colla parte reale di una curva algebrica reale C_1^n d'ordine n, la quale giaccia in un sistema algebrico reale (per esempio in un fascio reale) contenente la C^n, e nell'intorno reale di questa.

Il quesito fu già da me posto e risolto affermativamente in un caso particolare, quando cioè la C^n si spezzi in componenti prive di punti doppî

[1] Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

[2] Brusotti, *Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante « piccola variazione » di una curva spezzata* [Annali di Matematica, serie 3ª, tomo 22 (1913), pp. 117-169]; *Sui fasci di curve grafiche* [Succ. Bruni, Pavia, 1919, pp. 1-204].

reali ed i punti doppî reali di C^n vengano tutti sciolti dalla « piccola variazione » topologica assegnata, riuscendo anzi in questo caso la « piccola variazione » algebrica effettuabile in un fascio del quale venne pure indicata la costruzione (1).

Qui fondandomi sopra un metodo di rappresentazione iperspaziale, che mi sembra non privo di interesse per la sua semplicità, giungo a rispondere, sempre in senso affermativo, al quesito più generale, risolvendo così esaurientemente una questione che si può ritenere fondamentale nello studio della « piccola variazione ».

2. Premetto alcune osservazioni di carattere puramente algebrico e indipendenti da considerazioni di realtà.

Si rappresentino le curve piane di ordine n coi punti di uno spazio lineare S_r ad $r = \frac{1}{2} n(n \quad 3)$ dimensioni. I punti-immagine di curve dotate di punto doppio sono i punti di una ipersuperficie V d'ordine $3(n-1)^2$.

Un punto P semplice per V sarà immagine di una curva dotata di un sol punto doppio ordinario M.

Si ricordi che, in un fascio di curve piane d'ordine n, una curva avente punto doppio ordinario in un punto-base semplice è da contarsi due volte fra le $3(n-1)^2$ curve del fascio dotate di punto doppio. Ne segue che l'iperpiano tangente a V in P è l'immagine del sistema lineare ∞^{r-1} delle curve piane d'ordine n passanti semplicemente per M (2).

3. Più in generale se una curva piana C^n d'ordine n possiede d punti doppî ordinarî $M_1, M_2, \ldots, M_d$, il suo punto-immagine P sarà d-plo per V. Anzi esso sarà d-iperplanare, essendo gli iperpiani tangenti in P alle d falde le immagini dei d sistemi lineari ∞^{r-1} delle curve piane d'ordine n passanti rispettivamente per $M_1, M_2, \ldots, M_d$.

Si osservi ora che *il sistema delle curve d'ordine n aggiunte a* C^n *è regolare* (3), ossia che il passaggio semplice di una curva piana di ordine n

(1) *Sulla generazione* ecc. (cit.), § 9, § 10.

(2) Ne segue pure, ma qui non occorre, che un iperpiano tangente a V la tocca lungo un S_{r-3}, immagine del sistema lineare ∞^{r-3} di curve piane d'ordine n passanti doppiamente per uno stesso punto M.

(3) Proprietà nota per C^n irriducibile; cfr. Bertini, *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico* [Annali di Matematica, serie 2ª, tomo 22 (1894), pp. 1-40]; n. 17. Basterà dunque provare che se l'affermazione vale per C^n spezzata in h componenti irriducibili, essa vale per C^n spezzata in $h+1$. Sia $f \equiv f_1 f_2 = 0$ l'equazione di C^n, essendo $f_1 = 0$ (d'ordine n_1) spezzata in h di dette componenti ed $f_2 = 0$ (d'ordine n_2) la rimanente. Per il teorema di Noether $Af + B\varphi$ nel caso semplice, il sistema delle aggiunte d'ordine n a C^n è:

$$A_2 f_1 + A_1 f_2 = 0 \tag{1}$$

ove $A_i = 0$ varii comunque nel sistema delle aggiunte d'ordine n_i ad $f_i = 0$. Ma (1) è

per i d punti doppi di C^n equivale a d condizioni lineari indipendenti. Ciò per la rappresentazione iperspaziale si traduce nel fatto che *i ν iperpiani tangenti in* P *alle d falde di* V *hanno in comune un* S_{r-d} *e non uno spazio di maggior dimensione*. Ne segue che d' iperpiani comunque scelti fra essi hanno in comune un $S_{r-d'}$ e non uno spazio di maggior dimensione.

4. Suppongo che, nella rappresentazione in S_r, curve reali abbiano punti-immagine reali.

Osservo che la parte reale di V consterà allora di una varietà Ω (ad $r-1$ dimensioni reali) costituita dai punti-immagine delle curve reali dotate di punto doppio reale e di una varietà doppia isolata (ad $r-2$ dimensioni reali) costituita dai punti-immagine delle curve reali dotate di coppia di punti doppi immaginario-coniugati. Da questa varietà doppia isolata che non ha alcun riferimento coll'aspetto delle curve piane si potrà nel seguito prescindere.

Ciò posto, sia C^n reale e dotata di $\delta > 0$ punti doppi reali $M_1, M_2, \ldots, M_\delta$. Il suo punto-immagine sarà un punto P nel quale s'incrociano δ falde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\delta$ di Ω. I δ iperpiani $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\delta$ tangenti in P ad Ω lungo le falde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\delta$ hanno in comune (n. 3) un $S_{r-\delta}$ e non uno spazio di maggior dimensione.

5. Si applichi alla parte reale Γ di C^n una « piccola variazione » topologica *che sciolga tutti i δ punti doppi*. Nell'intorno di uno M_i di questi, la « piccola variazione » potrà avere l'uno o l'altro di due opposti comportamenti [comportamenti *complementari* (1)]. Invero, se M_i è nodale, ordinati ciclicamente intorno ad esso i quattro elementi di Γ che ne escono, potrà la « piccola variazione » raccordare il primo elemento col secondo (ed il terzo col quarto), oppure raccordare il primo col quarto (ed il secondo col terzo); se poi M_i è isolato, esso potrà nella « piccola variazione » produrre un circuito, oppure svanire senza traccia. E si hanno così 2^δ tipi topologicamente distinti di « piccola variazione ».

Se si applica a C^n una « piccola variazione » algebrica, alla scelta fra i due aspetti complementari della relativa « piccola variazione » topologica nell'intorno di M_i corrisponde in S_r il fatto che il punto P'_1 immagine della trasformata C'^n_1 si può prendere nell'intorno reale di P dall'una o dall'altra banda della falda μ_i.

Ora nell'intorno reale di P le δ falde μ_i si comportano topologicamente come i δ iperpiani tangenti τ_i, e, poichè questi si tagliano precisamente in

---

pure il sistema lineare al quale *appartengono* i sistemi $A_2 f_1 = 0$, $A_1 f_2 = 0$, i quali hanno in comune la sola $f = 0$. Calcolando sotto questo aspetto la dimensione di (1) e tenendo presente l'ipotesi pel caso di h componenti irriducibili, si deduce facilmente che (1) è regolare, come appunto si voleva.

(1) *Sulla generazione* ecc. (cit.), § 2; *Sui fasci di curve grafiche* (cit.), § 4.

un $S_{r-\delta}$, le falde stesse dànno luogo ad una ripartizione dell'intorno in 2^δ distinte regioni, ciascuna delle quali risponde ad una delle 2^δ scelte che si possono fare sulla posizione di P_1 in rapporto alle μ_i [1].

Si assegni perciò comunque la « piccola variazione » di Γ fra le 2^δ topologicamente distinte. Sarà sempre individuabile nell'intorno reale di P una delle 2^δ regioni in modo tale che, condotto in essa (com'è lecito) con estremo in P un segmento di retta, ad ogni spostamento del punto-immagine a partire da P su quel segmento corrisponda una « piccola variazione » di C^n effettuabile in un fascio e topologicamente equivalente alla « piccola variazione » topologica assegnata.

Concludendo: *Se la « piccola variazione » topologica di Γ scioglie tutti i δ punti doppi, essa può tradursi in una « piccola variazione » algebrica di C^n effettuabile entro un fascio (reale).*

6. Si applichi ora alla parte reale Γ di C^n una « piccola variazione » che sciolga $\alpha < \delta$ punti doppî assegnati $M_1, M_2, \ldots M_\alpha$ e mantenga i rimanenti β ($\alpha + \beta = \delta$) lasciandoli fissi o mutandoli in punti doppi prossimi. Si avranno 2^α tipi topologicamente distinti.

Una « piccola variazione » algebrica di C^n topologicamente identica alla « piccola variazione » topologica assegnata dovrà rappresentarsi in S_r con uno spostamento del punto-immagine a partire da P sulla varietà ω (ad $r - \beta$ dimensioni reali) intersezione delle β falde μ_h ($h = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, \alpha + \beta$), spostamento in cui il punto si muova tenendosi dalla banda opportuna rispetto a ciascuna delle α falde μ_k ($k = 1, 2, \ldots, \alpha$).

Uno spostamento su ω può avvenire sotto questo aspetto appunto in 2^α diverse maniere. Invero sulla ω le α falde μ_k operano in modo topologicamente identico a quello con cui operano gli α iperpiani τ_k sullo spazio σ (ad $r - \beta$ dimensioni) intersezione dei β iperpiani τ_h. Ora gli α iperpiani τ_k tagliano σ secondo altrettanti spazî ad $r - \beta - 1$ dimensioni aventi in comune precisamente un $S_{r-\delta}$ ed, essendo $r - \delta = (r - \beta) - \alpha$, determinano in σ nell'intorno reale di P precisamente 2^α regioni.

Coll'intervento di un *segmento di curva algebrica* uscente da P e giacente su ω nella opportuna regione, sarà agevole riprendere il procedimento del n. 5, concludendo che *ogni « piccola variazione » topologica di Γ si può tradurre in una « piccola variazione » algebrica di C^n.*

È così raggiunto lo scopo principale della presente Nota.

7. Se però la « piccola variazione » algebrica si vuole effettuare *entro*

[1] Se, anzichè alle falde μ_i, si fa riferimento agli iperpiani τ_i, le 2^δ regioni corrispondono alle 2^δ scelte per i segni delle prime δ coordinate cartesiane di un punto, quando P (supposto proprio) si assuma come origine e i primi δ iperpiani coordinati si facciano coincidere cogli iperpiani τ_i.

un fascio [che suppongo *privo di parti fisse* (1)], per un noto teorema di Bertini (2) dovranno mantenersi fissi i β punti doppî M_h ($h = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, \alpha + \beta$).

Con θ_h ($h = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, \alpha + \beta$) si indichi lo spazio ad $r - 3$ dimensioni immagine in S_r del sistema delle curve piane di ordine n aventi punto doppio in M_h e con θ, quando esista, lo spazio a $t > 0$ dimensioni, intersezione degli spazî θ_h. Nell'ipotesi fatta, alla « piccola variazione » dovrà corrispondere uno spostamento del punto-immagine sopra un segmento di retta uscente da P e giacente in θ.

Ora perchè ciò sia possibile *comunque si fissi la « piccola variazione » topologica*, basta ed occorre che *gli iperpiani* τ_k ($k = 1, 2, \ldots, \alpha$) *taglino* θ *in altrettanti spazî a* $t - 1$ *dimensioni aventi in comune precisamente un* $S_{t-\alpha}$, ossia che *le curve piane d'ordine n passanti doppiamente per i* β *punti* M_h *costituiscano un sistema lineare* ∞^t *entro il quale quelle passanti semplicemente per gli* α *punti* M_k *formino un sistema lineare precisamente* $\infty^{t-\alpha}$.

La condizione è dunque puramente algebrica.

Agronomia. — *La solubilità della Leucite nel terreno agrario.* Nota del prof. G. de Angelis d'Ossat, presentata dal Socio R. Pirotta (3).

I fratelli Rogers (1848), per primi, affermarono la solubilità della leucite nell'acqua. Posteriormente parecchi dimostrarono che la leucite nel terreno agrario mette a disposizione delle piante la potassa che contiene: fra costoro debbonsi, per ora, ricordare Clarke (1895-1900), Giglioli (1899), Steiger (1900), Paternò (1900), Ampola (1903), Monaco (1903-1912), Caruso (1905), Casoria (1906), Ampola e De Grazia (1906), De Grazia e Camiola (1906), Angeloni, Bernardini (1908), de Angelis d'Ossat (1910) ed ultimamente Bandini, Nazari, Cecchetti, Felcini, Bonomi, Alvisi (1917), e specialmente Giannobi ecc. La scomposizione della leucite è facilitata da parecchi agenti, i quali sono quasi sempre presenti nel terreno agrario, come:

(1) In generale il fascio non potrà avere parti fisse. Se però la C^n è riducibile e tutti i punti doppî di C^n che siano semplici o doppî per una sua componente sono fra i β da conservarsi, tale componente potrà anche mantenersi fissa. In tal caso le considerazioni che seguono si intenderanno riferite alla parte mobile.

(2) Bertini, *Sui sistemi lineari* [Rendiconti del R. Istituto lombardo, serie 2ª, vol. 15 (1882), pp. 24-28]; oppure *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* [Spoerri, Pisa, 1907, pag. 227].

(3) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

l'azione decomponente delle radici, la presenza dei sali di NH^4 e di Na, l'intervento dei microrganismi, l'CO^2 ecc. (1).

Ai geologi però già da gran tempo era nota la facile alterazione delle rocce leucitiche e della stessa leucite per azione dei soli atmosferici e senza il concorso diretto delle piante e del terreno agrario. I petrografi poi conoscono chiaramente tutte le diverse forme paragenetiche che partono dalla leucite e citano infatti questo minerale fra quelli che più facilmente si alterano e che generano pseudomorfosi (caolino, analcime, sanidino, plagioclasi, nefelina, leucite-ammonio).

La questione della solubilità nell'acqua della leucite si ricollega a quella dei feldspati e dei silicati in genere e quindi la relativa bibliografia si allarga enormemente. Tenendomi il più possibile nei limiti ristretti sull'argomento che presentemente si tratta, oltre ai citati autori, menziono i seguenti: Missoux (1856), Birnbaum (1862-63), Dehérain (1863), Ullik (1871), Laisné (1886), Aitken (1887), Nilsson (1889), Muller (1890), Passerini (1894), Sestini (1899), Schloesing (1900-02), Petermann (1900), Alvisi (1903-17), De Polo (1904), Dumont (1904), Prianschsukow (1905-12), Manuelli (1908), Ciuffolini (1909), Ulpiani (1910), Craveri (1910), Schneiderholm (1912), Bunger (1912), Ross (1912), André (1913), De Boladerès (1914), Soave (1915), De Twill (1919), Ames e Boltz (1920), ecc.

* * *

La scuola pedologica americana, capitanata da Whitney e Cameron, sostiene che i costituenti mineralogici del terreno si sciolgono puramente e semplicemente nell'acqua, senza che i minerali subiscano alterazione alcuna e permanendo quindi integrale la natura dei minerali residuali. Le reazioni, con le relative sostituzioni, avverrebbero solo per la parte sciolta nell'acqua. A questo stesso parere sembra che accedano — dopo molte ricerche microscopiche, pazienti ed accurate, sui minerali dei terreni agrari della Francia — il Delage e Lagatu (1904).

Il Cayeux (1905) invece afferma che nel terreno agrario si trovano i minerali con gradazioni diverse di alterazione e che quindi questi di regola dànno direttamente luogo a decomposizioni e sostituzioni, senza sciogliersi prima nell'acqua.

I fenomeni idrolitici spiegano i fatti che giustamente sorpresero i pedologi americani e francesi e gettano un ponte fra le due opposte concezioni. L'idrolisi dei minerali e quella della leucite ha permesso a Lepierre (1895) e ad altri tracciare per la leucite le fasi teoriche che si succedono durante il fenomeno coll'azione degli altri agenti.

(1) Il Ferrero L. O. (1892) fu il primo che pensò all'utilizzazione agraria delle rocce leucitiche italiane.

Dall'altra parte non mancano osservazioni positive che assicurano l'alterazione dei minerali anche senza l'intervento dell'acqua, la quale non è sempre sufficiente da sola a provocare la scomposizione dei minerali. Non v'ha ragione che le forze paragenetiche che affaticano i minerali debbansi arrestare proprio nel ben complicato laboratorio chimico che costituisce il terreno agrario, nel quale invece riconosciamo la presenza di molte cause favorevoli e di maggiore efficacia per la scomposizione dei minerali. Tra queste ultime non posso tacere l'azione di superficie, la quale nelle terre deve raggiungere un valore sicuramente considerevole e l'azione della fase gassosa.

*
* *

Nel caso speciale della leucite posso affermare, in base a parecchie esperienze e ripetuti esami microscopici sopra terre dell'altipiano del Lazio, che il minerale ben presto si altera e si trasforma dando origine agli svariati prodotti delle vicende subite: mentre che nelle rocce sotterranee, sia laviche sia piroclastiche, rimane allo stato fresco quasi generalmente. Nelle terre invece molto dilavate i cristalli isolati di leucite od i frammenti, pur rimanendo inalterati, diminuiscono di volume, come dimostra l'avvenuto arrotondamento degli spigoli e degli angoli solidi, senza l'intervento di azione abrasiva meccanica.

Ho inoltre ripetuto le esperienze dei Rogers, del Clarke, dello Steiger e del Bernardini sulle leuciti laziali, ottenendo sempre risultati positivi sia con la carta di tornasole sia con la soluzione di fenolftaleina. L'entità dell'effetto si è mostrata proporzionale al tempo impiegato ed alla superficie presentata dal minerale.

Le soluzioni idriche, ottenute per idrolisi, riescono così poco concentrate da non essere sufficienti all'alimentazione delle piante, come può dimostrarsi con appositi calcoli. Però non mancano cause che rompono l'equilibrio nella soluzione e queste sono molteplici nel terreno agrario, come: il potere adsorbente, lo sviluppo continuo e notevole di CO^2, l'azione speciale delle radici, la presenza dei sali di NH^4, l'alimentazione selettiva per ioni delle piante ecc. Per le citate ragioni sempre nuove quantità di sostanza minerale passa attraverso la soluzione, la quale pur rimanendo invariabilmente in grado tenue, tuttavia può sopperire alla specifica e completa appetenza delle piante. Specificando ricordo le relazioni reversibili che intercedono fra la leucite (residuo $Al^2 Si^4 O^2 = y$) ed i radicali acidi dei sali di $NH^4 = x$ e cioè:

$$2NH^4x + K^2y \rightleftarrows (NH^4)^2y + K^2x$$

donde la leucite-ammonio di Clarke e Steiger (1900) e del Bernardini (1908) dalla formola $(NH^4)^2 Al^2 Si^4 O^{12}$.

Con apposite esperienze, ho liberato parecchia potassa dalla leucite,

trattando questa allo stato puro e la leucitite, ridotte in polvere, con stallatico ed orina, al fine di intensificare e di abbreviare nel tempo il noto processo sull'ortose di Lawrence. I risultati da me ottenuti collimano con quelli che ebbero coloro che sperimentarono nelle condizioni analoghe, come De Grazia e Camiola, Passerini, Aloisi e Giannobi, ecc. Nel caso pratico dovrà preferirsi la leucite pura all'uso delle lave leucitiche, poichè queste, contenendo quasi sempre discreta quantità di ferro allo stato ferroso, possono aumentare di troppo il potere adsorbente del terreno e diminuire soverchiamente la concentrazione delle soluzioni percolanti e quindi la stessa fertilità.

Con un'altra esperienza, durata sei mesi, ho cercato di ponderare il valore idrolitico sulla leucite pura del Lazio. Di questo minerale ho scelto frammenti calibrati, vitrei, esenti da visibili inclusioni e li ho messi in acqua distillata. Questa è stata rinnovata quasi ogni mese sino al quantitativo di un litro e mezzo.

Il materiale leucitico pesava gr. 96.853 e quindi teoricamente conteneva gr. 20,82 di K^2O: la sua superficie calcolata è risultata pari a dc^2 31,485. Alla fine dell'esperienza il materiale ha perduto il 0.124 % del peso primitivo.

Di notevole interesse è stata la constatazione della formazione della parte dissociata non solubile sotto forma di *gelo* e non di *solo*; infatti l'acqua ha subito chiarificato dopo i rimescolamenti della massa. Secondo van Bemmelen e Cornu gli agenti atmosferici generano sulle rocce i *geli*, mentre secondo il Gedroiz ed Ulpiani si producono *soli*.

L'ultimo risultato ottenuto non può confrontarsi con quelli delle mie esperienze del 1910, pubblicati in questi Rendiconti, a causa della disparità delle condizioni; ma rimane però dimostrato e misurato il potere idrolitico della leucite.

Allo scopo di formarmi un concetto concreto sulla solubilità della leucite in rispetto alla vegetazione, ho trattato il minerale con uno fra i più adatti solventi, cioè con una soluzione idrica di acido citrico al 2 %.

I frammenti di leucite furono previamente riconosciuti vitrei e senza inclusioni e se ne misurarono i relativi diametri: la leucite pesava gr. 69.345 e la sua superficie risultò di dc^2. 4,3859. Dopo sei mesi, con soluzione acida di cc 800, ho ottenuto una diminuzione in peso — previa decantazione dalla parte insoluta — di 0,677 %: cui corrispondono gr. 0,145 di K^2O.

La leucite in questa esperienza, come in tutte le altre, non ha mostrato di aver subìto la minima alterazione superficiale.

*
* *

I fatti esposti spiegano i favorevoli risultati ottenuti con le concimazioni leucitiche, le quali, apportando un elemento indispensabile e sufficientemente solubile nelle terre che ne sono sprovviste, aumentano, con forte

vantaggio economico, i prodotti delle piante potassofile erbacee, fra le quali particolarmente sensibili si mostrano le leguminose. Anche le arboree, come gli ulivi, per mezzo del sovescio hanno risentito il vantaggio nello stesso primo anno di trattamento. Ultimamente alcuni intelligenti ed accurati agricoltori hanno istituito esperienze su larga scala con leucite ridotta in polvere sottilissima, ottenendo generalmente risultati favorevoli, i quali non tarderanno gli sperimentatori a rendere di pubblica ragione.

Tutto ciò insinua in noi italiani la speranza di poter mettere in valore, in un prossimo avvenire, le enormi quantità di potassa, calcolate dal Washington in 9 miliardi di tonnellate, delle nostre rocce vulcaniche.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 maggio 1921.

Anastasia G. E. — Le forme elementari della composizione dei vegetali o l'origine della specie (Filogenesi delle *Nicotianae*, delle *Primulaceae* e delle *Violae*) (Estr. dal « Bullett. tecnico », n. IV). Scafati, 1920. 8°. pp. 1-43.

Bozzolo C. — In memoria di Camillo Bozzolo. Torino, 1921. 8°, pp. 1-52.

Bozzolo C. — In memoria di Camillo Bozzolo (Scritti medici dei discepoli). Torino, 1921. 8°, pp. I-XXXVIII, 1-225.

Eulerus. — Leonhardi Euleri opera omnia. Series I, voll. II, III, XIII, XVII, XVIII. Lipsiae, 1916-1920. 4°, pp. I-XXXIV, 1-611; I-XXXVII, 1-543; I-XVII, 1-508; I-VII, 1-457; I-XI, 1-475.

Huygens C. — Oeuvres complètes publiées par la Société Hollandaise des Sciences, tome XIII. fasc. I, II; tome XIV. La Havre, 1916-1920. 4°, pp. I-CLXVII, 1-904; 1-556.

Lockyer S. — Further observations of the spectrum of Nova Cygni III, 1920 (Repr. from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society », vol. LXXXI, pp. 173-179). Edinburgh, 1921. 8°.

Pincherle S. — Sobre la iteracion analitica (Extr. da la « Revista matemática hispano-americana »). Madrid, 1921. 8°, pp. 1-24.

Scorza G. — Note e Memorie di matematica, vol. I, fasc. I. Catania, 1921. 8°, pp. 1-64.

Silvestri F. — Descrizione di alcuni *Staphylinidae* (Coleoptera) termitofili delle regioni orientali e australiana (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'Agricoltura in Portici », vol. XV). Portici, 1921. 8°, pp. 1-23.

Presentate nella seduta del 3 giugno 1921.

Battaglia M. — Histologische Veränderungen in den Organen aus experimenteller Trypanosomiasis veränderter Tière (Abdruck aus dem « Centralblatt f. Bakteriologie Parasitenkunden. Infektionskrankheiten ». Bd. 86, pp. 393-395). Neapel, 1920. 8°.

Bourgeois. — Notice sur le général Bassot (1841-1916) (Extr. de l'« Annuaire du Bureau des longitudes »). Paris, 1921. 8°, pp. 1-16.

Colizza C. — Sopra una malattia poco nota del Giaggiolo prodotta da Septoria Iridis Massal (Estr. da le « Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LIII, pp. 494-501). Modena 1920. 8°.

Curral J. I. — Nuevos teoremas que resuelven el problema de Hurwitz (Extr. da la « Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid », tomo XVIII). Madrid, 1921 8°, pp 1-22.

Eddington A. S. — Espace, temps et gravitation. La théorie de la relativité généralisée dans ses grandes lignes; exposé rationel suivi d'une étude mathématique de la théorie. Ouvrage

traduit de l'Anglais par J. Rossignol élève à l'école normale supérieure, avec une introduction de P. Langevin professeur au Collège de France. Paris, Librairie scientifique Hermann, 1921. 8°, pp. I-XII, 1-262. Partie théorique, pp. I-IV, 1-145.

FANTOLI G. — Commemorazione di Giuseppe Colombo (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LIV, pp. 111-115). Milano, 1921. 8°.

FRINTZ H. — The Vegetation of the Siberian-Mongolian Frontiers. Trondhyem, 1921. 4°, pp. 1-457.

GUGLIELMO G. — Intorno ad alcuni giudizi ed alcune dimostrazioni termodinamiche del prof. Guido Grassi e di altri. Cagliari, 1921. 8°, pp, 1-58.

LEONE S. — La lotta contro il « Tracoma » nella provincia di Siracusa. Siracusa, 1921. 8°, pp. 1-16.

LUSTIG A. — Studi ed osservazioni sulla Pellagra (Estr. da « Lo Sperimentale », anno LXXV). Firenze, 1921. 8°, pp. 1-96.

PASSERINI N. — Esperienze sulla resistenza dell'Anguillula dell'aceto a differenti agenti (Estr. da le « Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LIV, pp. 14-64). Modena, 1921. 8°.

PEREIRA DE SOUSA F. L. — O terremoto do 1° de novembro de 1755 em Portugal e um estudo demografico, vol I. Lisboa, 1919. 4°, pp. 1-277.

PESSION G — Sulla misura della capacità degli aerei R. T. Un caso particolare della misura dell'altezza di radiazione o altezza efficace degli aerei R. T. (Estr. dal Giorn. « l'Elettrotecnica »). Varese, 1921. 4°, pp. 1-8.

PEYRONEL B. — La forma ascofora dell'Oidio della quercia a Roma (Estr. da le « Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LIV). Modena, 1921. 8°, pp. 1-10.

PEYRONEL B. — La forma ascofora della Rhacodiella castaneae, agente del nerume delle castagne (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. XXIX, pp. 324-327). Roma, 1920. 8°.

RADDI A. — Breve cenno sommario sul terremoto della Lunigiana del 7 settembre (Estr. dal « Politecnico »). Milano, 1921. 8°, pp. 1-15.

RA V. — Sopra l'azione del Tomes fulvus (Scop.) Fries sul mandorlo (Estr. da le « Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LIV, pp. 114-118). Modena, 1921. 8°.

SALVADORI R. — Atomi e nuclei atomici (Estr. dal « Giornale di chimica industriale ed applicata ». Milano, 1921. 4°, pp. 1-7.

SANTARELLI E. — Contribuzione alla flora alveale del Serchio (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze naturali », vol. XXXIV). Pisa, 1921. 8°, pp. 1-45.

TRAVERSO G. B. — Commemorazione del prof. Giuseppe Cuboni (Estr. dagli « Atti della Società agronomica italiana », fasc. II). Roma, 1921. 8°. pp. 1-36.

TRAVERSO G. B. — Commemorazione del prof. Pier Andrea Saccardo (Estr. dal Nuovo « Giornale botanico italiano », vol. XXVII, pp. 39-74). Sancasciano val di Pesa, 1920. 8°.

VALLAURI G. — Misure di radiazione sugli aerei R. T. (Estr. dal Giornale « l'Elettrotecnica »). Varese, 1921. 4°, pp. 1-12.

ZEILON N. — Sur les équations aux dérivées partielles à quatre dimensions et le broblème optique des milieux biréfringents. I-II partie (Nova acta regiae Societatis scientiarum Upsaliensis, vol. V, nn. 3, 4). Upsala. 1921. 4°, pp. 1-128; 1-55.

INDICE DEL VOLUME XXX, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1921 — 1º Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

Abetti A. « Sulla applicazione del calcolo vettoriale alla astronomia ». 235.

Abetti G. « Determinazioni astronomiche di latitudini e longitudini eseguite nell'Asia Centrale ». 305.

Angeli. « Osservazioni varie ». 259.

— e Pieroni. « A proposito di un lavoro del prof. E. Salkowski sopra le melanine ». 241.

Artom. « Sopra alcuni apparati di radiomeccanica dirigibile ». 178.

B

Bianchi. Fa omaggio del suo volume « Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici e principî di aritmetica analitica ». 224.

Bompiani. « Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie ». 55.

Bora. « Contributo alla storia naturale degli anofeli e alla lotta biologica contro di essi ». 122.

Bottazzi. « Ricerche sulla ghiandola salivare posteriore dei Cefalopodi. IV: Attività secretiva della ghiandola in varie condizioni sperimentali ». 9.

Bruni. « Sulla solubilità delle sostanze cristalline nel caucciù ». 75.

Bruni. « Un nuovo procedimento per vulcanizzare a freddo la gomma elastica ». 280.

— e Romani. « Sul meccanismo di azione di certi acceleranti della vulcanizzazione della gomma elastica ». 337.

Brusotti. « Sulla ' piccola variazione ' di una curva piana algebrica reale ». 375.

Burali-Forti. « Sui numeri reali e le grandezze ». 175.

C

Castelnuovo. È eletto Segretario della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. 34.

— Presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando fra queste una raccolta di Memorie del Socio straniero *Richards*. 34.

— « Sulle funzioni abeliane ». 50; 99; 195; 355.

— Presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle del Socio *Fano*, del Corrisp. *Silvestri* e una commemorazione del Socio straniero *Norman Lockyer*. 96.

— Comunica l'elenco dei concorrenti al premio Reale per l'*Astronomia* per il 1920. 96.

— Comunica gli elenchi dei concorrenti ai premi del Ministero dell'Istruzione per

le *Scienze fisiche* e *chimiche* per il 1920 e alla *Fondazione Carpi* per il 1919-20. 128.

Castelnuovo. Presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle del Socio *Silvestri* e di *G. Leonardi*, del Socio *Pirotta* ecc. 161; del Corrisp. *Loria* e del Socio *Foà*, ecc.; il 1° fasc. delle « Esercitazioni matematiche » pubblicate dal Circolo matematico di Catania. 224; dei Soci *Pincherle* e *Silvestri*. 287.

Celoria. Sua commemorazione 188.

Cerulli. Commemorazione del Socio *G. Celoria*. 188.

Ciamician e Ravenna. « Sull'influenza di alcune sostanze organiche sullo sviluppo delle piante ». 3.

— e Ciusa. « Considerazioni sulla costituzione intima del benzolo e di alcuni nuclei eterociclici ». 72.

Ciusa. Vedi *Ciamician*.

Colombo. « Annuncio della sua morte ». 96.

Comessatti. « Saggi di una teoria geometrica delle forme binarie. IV: Rappresentazione tipica dei covarianti ». 44.

Corbino. Commemorazione del Socio *Righi*. 215

— « L'analogo termico dell'effetto Oersted-Ampère ». 301.

Cotronei. « Sulla morfologia causale dello sviluppo oculare del Bufo vulgaris. 25.

Crocco. « Sull'energia disponibile del vento ». 131.

Cuboni. Sua commemorazione. 182.

D

De Angelis. M. « Sulla forma cristallina della Trimetilfloretina $C_6H_2O_3(CH_3)_3 . CO . CH(CH_3) . C_6H_4OH$ ». 348.

De Angelis d'Ossat. « La solubilità della Leucite nel terreno agrario ». 379.

De Marchi. « Il gradiente termico verticale nell'atmosfera ». 269.

— « Gradiente termico e accelerazione verticale nell'atmosfera ». 367.

De Stefani. « Silicospongie fossili della Liguria occidentale ». 103; 167; 264; 333; 372.

Di Legge. Commemorazione del Socio *M. Rajna*. 221.

F

Federow. Annuncio della sua morte. 96.

Ferrari. « Sul berillo di Piona (lago di Como). 89.

Foà. Fa omaggio del vol. VII del « Trattato di anatomia patologica per medici e studenti » da lui diretto. 354.

Fubini. « Sulla teoria proiettiva delle congruenze W ». 273.

G

Galeotti. Annuncio della sua morte. 286.

Gorini. « Ulteriori ricerche sull'attività proteolitica dei fermenti lattici. V: Fenomeni di mutazione fisiologica brusca ». 312.

Grassi B. « L'Anofele può propagare la malaria anche direttamente? ». 7; 336.

— Comunica alla Classe un indirizzo di felicitazione presentato dal Presidente *F. D'Ovidio*, nella seduta dell'8 maggio all'Ing. *E. Mancini*, in occasione del 40° anniversario della di lui nomina a Cancelliere dell'Accademia. 354.

I

Issel. « Cenni di un ordinamento delle Stimate geologiche ». 106.

Iucci. « Sulla presenza di depositi uratici nel tessuto adiposo dei Termitidi ». 92.

— « Sul metabolismo dei reali veri nella società dei Termitidi ». 213.

L

Lazzarino. « Sulle equazioni del moto di rotazione attorno ad un punto fisso di un solido avente un numero qualunque di cavità riempite da liquidi viscosi a densità diverse e comunque variabili ». 13.

— « Sulla variazione dell'energia cinetica di un sistema semi-rigido ruotante attorno ad un punto fisso quando sia nullo il momento rispetto a questo punto delle forze esterne. 113.

Lazzarino. « Sui moti limiti di un sistema semirigido ruotante attorno ad un punto fisso e sottratto all'azione di forze esterne ». 246.

Lefschetz. « Sur le théorème d'existence des fonctions abéliennes ». 48.

Levi-Civita. Presenta alcune pubblicazioni del Socio *Maggi* e del Corrisp. *Guidi* e ne parla. 224.

Lo Surdo. « Elio e neon ' sintetici ' ». 85.

— « L'audizione biauricolare dei suoni puri ». 125.

— « Spettroscopio a gradinata catottrica ». 136.

Lydekker. Annuncio della sua morte. 286.

M

Maestrini. Contributo alla conoscenza degli enzimi. VI: Sul potere protettivo dell'amido e di altre sostanze sulla ptialina, in ambiente acido ». 315.

Marchiafava. Fa omaggio di una Commemorazione *di G. M. Lancisi*. 34.

Magrini. « La missione italiana per l'esplorazione dei mari di Levante ». 139.

— Fa omaggio, dandone notizia, del primo volume degli « Antichi scrittori d'idraulica veneta ». 161.

Mattirolo. Commemorazione del Socio *P. A. Saccardo*. 96: 149.

Mazzetti. Vedi *Parravano*.

Millosevich. « Studi su minerali del Lazio. La melilite degli inclusi nel peperino ». 80.

P

Parravano e Mazzetti. « Sulla trasformazione della magnesia leggera in magnesia pesante ». 63.

Pascal. Circuitazione superficiale. II: Sua espressione vettoriale e teoremi generali analoghi a quelli sulla ordinaria circuitazione ». 117; III: Il teorema della forza sostentatrice nel caso di una corrente fluida spaziale ». 249.

Paternò. Fa omaggio di una pubblicazione del prof. *Mieli* e ne discorre. 96.

Pellizzari. « Sintesi della *o*-Fenilendiicianguanidina dalla *o*-Fenilendiamina. 39.

Pellizzari. « Passaggio dalla guanidina alla cianamide e dalla biguanide alla diciandiamide ». 171.

Pérès. « Trasformations qui conservent la composition ». 318.

— « Sur les fonctions permutables ». 344.

Perrier. « Sulla vera natura della Rosasite ». 119; 143.

— « Sulla presenza dello zinco nella malachite di Chessy ». 309.

Picone. « Sul potenziale di doppio strato superficiale ». 134.

Pieragnoli. « Patologia di alcuni mammiferi pliocenici e postpliocenici della Toscana ». 256.

Pieroni. Vedi *Angeli*.

Pirotta. Commemorazione del Socio *G. Cuboni*. 182.

R

Rajna M. Sua commemorazione. 221.

Ravenna. Vedi *Ciamician*.

Remotti. « Variazioni di peso specifico durante lo sviluppo delle uova di Teleostei di superficie e di profondità ». 27.

Righi. Sua commemorazione. 215.

Rovereto. « Lo svolgimento erosivo considerato a partire da una superficie fondamentale ». 209.

Romani. « Sui disolfuri di tiourame come agenti di vulcanizzazione della gomma ». 283.

— Vedi *Bruni*.

S

Sabatini. « L'unità del sistema Vulsinio ». 22.

Saccardo. Sua commemorazione. 96; 149.

Segre. « Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani, e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti ». 67.

— « Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese ». 200; 227.

Sereni. « Ricerche biochimiche sul preparato centrale di rospo ». 351.

Sergi. « Sulla topografia vertebro-midollare nello cimpanzè ». 30.

Serini. « Risoluzione del problema simmetrico di Dirichlet pel cilindro circolare ». 59.

Severi. « Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica ». 163; 204; 231; 276; 296; 328; 365.

Severini. « Sulle equazioni integrali: $\int_a^b \theta(x)\, x^n dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ ». 17.

Somigliana. « Sulla profondità dei ghiacciai ». 291; 323; 360.

Stefani. « Contributi alla fisiologia generale dei nervi e dei centri nervosi ». 337.

Stefanini. « Sulla costituzione geologica della Cirenaica. I: Terreni eocenici ». 146.

T

Togliatti. « Sulle varietà a tre dimensioni e di quarto ordine che son luoghi di almeno ∞^2 rette ». 252.

Tonelli. « Su due proposizioni di I. W. Lindeberg e E. E. Levi, nel Calcolo delle variazioni ». 19; 110.

V

Viola. Dà notizia della morte del Socio straniero *E. S. Fedorow*. 96.

Volterra. (V. Presidente). Presenta alcuni pieghi suggellati inviati dai signori *Bresciani*, *Pastore* e *Pestalozza*, per essere conservati negli Archivi accademici ». 34; 161.

— Per incarico del Socio *Ciamician* presenta varie pubblicazioni del defunto dott. Rossi. 34.

Volterra. Comunica l'elezione a Segretario della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali del Socio *Castelnuovo*. 34.

— Annuncia la morte del Socio *G. Colombo* e del Socio straniero *G. Waldeyer*. 96.

— Dà annuncio della istituzione del concorso a premio « A. Righi ». 98.

— Presenta il terzo volume del « Cours de Physique mathématique » del Socio straniero *I. Boussinesq*, e ne parla. 161.

— Dà annuncio della morte del Corrispondente *Galeotti* e del Socio straniero *Lydekker*. 286.

— Comunica i ringraziamenti delle famiglie dei defunti Soci *Righi* e *M. Rajna*, per le condoglianze loro trasmesse dall'Accademia. 286.

— Comunica di aver inviato le congratulazioni dell'Accademia alla Società Geologica di Stoccolma per la celebrazione del suo cinquantenario. 287.

— Provvede all'apertura di due pieghi suggellati trasmessi dal Corrisp. *Bruni* e dal dott. *Romani*. 287.

— Presenta all'Accademia il prof. *Zeilon* dell'Università di Upsala. 354.

— Aggiunge parole di congratulazione e di auguri per l'ing. *Mancini*, e prega i Soci di firmare l'indirizzo che lo riguarda. 354.

W

Waldeyer. Annuncio della sua morte. 96.

INDICE PER MATERIE

A

Agronomia. « La solubilità della Leucite nel terreno agrario ». *G. De Angelis d'Ossat.* 379.

Astronomia. « Sulla applicazione del calcolo vettoriale alla Astronomia ». *A. Abetti.* 235.

— « Determinazioni astronomiche di latitudini e longitudini eseguite nell'Asia centrale ». *G. Abetti* 305.

B

Biologia. « Sulla morfologia causale dello sviluppo oculare del Bufo vulgaris ». *G. Cotronei.* 25.

— « Sulla presenza di depositi uratici nel tessuto adiposo dei Termitidi ». *C. Iucci.* 92.

— « Sul metabolismo dei reali veri nella società dei Termitidi ». *Id.* 213.

— « Variazioni di peso specifico durante lo sviluppo delle uova di Teleostei di superficie e di profondità ». *E. Remotti.* 27.

— « Ricerche biochimiche sul preparato centrale di rospo ». *E. Sereni.* 351.

— « Sulla topografia vertebro-midollare nello cimpanzè ». *S. Sergi.* 30.

Bollettino bibliografico. 35; 162; 224; 226; 288; 383.

C

Chimica. « Osservazioni varie ». *A. Angeli.* 259.

— « A proposito di un lavoro del prof. E. Salkowski sopra le melanine ». *Id.* e *A. Pieroni.* 241.

— « Un nuovo procedimento per vulcanizzare a freddo la gomma elastica ». *G. Bruni.* 280.

Chimica. « Sul meccanismo di azione di certi acceleranti della vulcanizzazione della gomma elastica ». *Id.* e *E. Romani.* 337.

— « Sull'influenza di alcune sostanze organiche sullo sviluppo delle piante ». *G. Ciamician* e *C. Ravenna.* 3.

— « Considerazioni sulla costituzione intima del benzolo e di alcuni nuclei eterociclici ». *Id.* e *R. Ciusa.* 72.

— « Sulla trasformazione della magnesia leggera in magnesia pesante ». *N. Parravano* e *C. Mazzetti.* 63.

— « Sintesi della o-Fenilendicianguanidina dalla o-Fenilendiamina ». *G. Pellizzari.* 39.

— « Passaggio dalla guanidina alla cianamide e dalla biguanide alla diciandiamide ». *Id.* 171.

— « Sui disolfuri di tiourame come agenti di vulcanizzazione della gomma ». *E. Romani.* 283.

Chimica fisica. « Sulla solubilità delle sostanze cristalline nel caucciù ». *G. Bruni.* 75.

Concorsi a premi. Elenco dei concorrenti al premio Reale per l'*Astronomia* del 1920. 96; ai premî del Ministero dell'Istruzione per le *Scienze fisiche e chimiche* 1920 e alla *Fondazione Carpi* pel 1919-20. 128.

— Nomina della Commissione per il premio Reale di *Astronomia* per l'anno 1921. 354.

— Annuncio della istituzione del concorso al premio « A. Righi ». 98.

Cristallografia. « Sulla forma cristallina della Trimetilfloretina $C_6H_2O_3(CH_3)_3 . CO . CH(CH_3) . C_6H_4OH$ ». *M. De Angelis.* 348.

E

Elezioni. Elezione del Socio *Castelnuovo* a Segretario della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. 34.

F

Fisica. « Sopra alcuni apparati di radiomeccanica dirigibile ». *A. Artom.* 178.

— « L'analogo termico dell'effetto Oersted-Ampère ». *O. M. Corbino.* 301.

— « Elio e neon 'sintetici' ». *A. Lo Surdo.* 85.

— « L'audizione biauricolare dei suoni puri ». *Id.* 125.

— « Spettroscopio a gradinata catottrica ». *Id.* 136.

Fisica terrestre. « Il gradiente termico verticale nell'atmosfera ». *L. De Marchi.* 269.

— « Gradiente termico e accelerazione verticale nell'atmosfera ». *Id.* 367.

— « La missione italiana per l'esplorazione dei mari di Levante ». *G. Magrini.* 139.

— « Sulla profondità dei ghiacciai ». *C. Somigliana.* 291; 323; 360.

Fisiologia. « L'anofele può propagare la malaria anche direttamente? ». *B. Grassi.* 7; 336.

— « Ricerche sulla ghiandola salivare posteriore dei Cefalopodi. IV: Attività secretiva della ghiandola in varie condizioni sperimentali ». *F. Bottazzi.* 9.

— « Contributo alla conoscenza degli enzimi. VI: Sul potere protettivo dell'amido e di altre sostanze nella ptialina, in ambiente acido ». *D. Maestrini.* 315.

— « Contributi alla fisiologia generale dei nervi e dei centri nervosi ». *A. Stefani.* 337.

G

Geologia. « Cenni di un ordinamento sistematico delle Stimate geologiche ». *A. Issel.* 106.

— « Sulla costituzione geologica della Cirenaica. I: Terreni eocenici ». *G. Stefanini.* 146.

Geometria. « Sulla teoria proiettiva delle congruenze W ». 273.

Geomorfologia. « Lo svolgimento erosivo considerato a partire da una superficie fondamentale ». *G Rovereto.* 209.

I

Idrodinamica. « Circuitazione superficiale. II: Sua espressione vettoriale e teoremi generali analoghi a quelli sulla ordinaria circuitazione ». *M. Pascal.* 117; III: Il teorema della forza sostentatrice nel caso di una corrente fluida spaziale ». *Id.* 249.

M

Matematica. « Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie ». *E. Bompiani.* 55.

— « Sulla 'piccola variazione' di una curva piana algebrica reale ». *L. Brusotti.* 375.

— « Sui numeri reali e le grandezze ». *C. Burali-Forti.* 175.

— « Sulle funzioni abeliane ». *G. Castelnuovo.* 50; 99; 195; 355.

— « Saggi d'una teoria geometrica delle forme binarie. IV: Rappresentazione tipica dei covarianti ». *A. Comessatti.* 44.

— « Sur le théorème d'existence des fonctions abéliennes ». *S. Lefschetz.* 48.

— « Transformations qui conservent la composition ». *J. Pérès.* 318.

— « Sur les fonctions permutables ». *Id.* 344.

— « Sul potenziale di doppio strato superficiale ». *M. Picone.* 134.

— « Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti ». *C. Segre.* 67.

— « Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese ». *Id.* 200; 227.

— « Risoluzione del problema simmetrico di Dirichlet pel cilindro circolare ». *R. Serini.* 59.

MATEMATICA. « Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica ». *F. Severi.* 163; 204; 231; 276; 296; 328; 365.

— « Sulle equazioni integrali: $\int_a^b \theta(x)\, x^n dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ ». *C. Severini.* 17.

— « Sulle varietà a tre dimensioni e di quart'ordine che sono luoghi di almeno ∞^2 rette ». *E. G. Togliatti.* 252.

— « Su due proposizioni di J. W. Lindeberg e E. E. Levi, nel Calcolo delle variazioni ». *L. Tonelli.* 19; 110.

MECCANICA. « Sull'energia disponibile del vento ». *G. A. Crocco.* 131.

— « Sulle equazioni del moto di rotazione attorno ad un punto fisso di un solido avente un numero qualunque di cavità riempite da liquidi viscosi a densità diverse e comunque variabili ». *O. Lazzarino.* 13.

— « Sulla variazione dell'energia cinetica di un sistema semi-rigido ruotante attorno ad un punto fisso quando sia nullo il momento rispetto a questo punto delle forze esterne ». *Id.* 113.

— « Sui moti limiti di un sistema semi-rigido ruotante attorno ad un punto fisso e sottratto all'azione di forze esterne ». *Id.* 246.

MINERALOGIA. « Ulteriori ricerche sull'attività proteolitica dei fermenti lattici. V: Fenomeni di mutazione fisiologica brusca ». *C. Gorini.* 312.

— « Sul berillo di Piona (lago di Como) ». *M. Ferrari.* 89.

MINERALOGIA, « Studî su minerali del Lazio. La melilite degli inclusi nel peperino ». *F. Millosevich.* 80.

— « Sulla vera natura della Rosasite ». *C. Perrier.* 119, 143.

— « Sulla presenza dello zinco nella malachite di Chessy ». *Id.* 309.

N

NECROLOGIE. Annuncio della morte del Socio *G. Colombo* e dei Socî stranieri *G. Waldeyer, E. S. Fedorow,* 96; *R. Lydekker,* 286; commemorazione del Socio *P. A. Saccardo.* 96; 149; annuncio della morte degli accademici *Cuboni.* 182; *Celoria.* 188; *Righi.* 215; *M. Rajna.* 221; *Galeotti.* 286.

P

PALEONTOLOGIA. « Silicospongie fossili della Liguria occidentale ». *C. De Stefani.* 103; 167; 264; 333; 372.

— « Patologia di alcuni mammiferi pliocenici e postpliocenici della Toscana ». *L. Pieragnoli.* 256.

V

VULCANOLOGIA. « L'unità del sistema Vulsinio ». *V. Sabatini.* 22.

Z

ZOOLOGIA. « Contributo alla storia naturale degli Anofeli e alla lotta biologica contro di essi ». *E. Bora.* 122.